Санкт-Петербургский государственный университет

Физический факультет

Ю.М. Голубев, И.В. Соколов, Т.Ю. Голубева

Проблемы квантовой оптики. Часть 1:

Основные понятия и теоретические подходы

Методическое пособие к курсу лекций
"Проблемы квантовой оптики"

Санкт-Петербург
2006

Утверждено
Методическим Советом физического факультета.

Составители:
проф. каф. Общей Физики 1
Голубев Юрий Михайлович;

проф. каф. Общей Физики 1
Соколов Иван Вадимович;

ст. преп. каф. Молекулярной биофизики
Голубева Татьяна Юрьевна.

Рецензент
Машек Игорь Чеславович, проф., д-р физ-матем. наук.

Глава 1

Введение

1.1 Уравнения Максвелла, разложение по собственным векторам объема, энергия поля

Уравнения Максвелла, описывающие поведение электромагнитного поля в вакууме, в единицах МКС выглядят следующим образом

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{1.1}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0, \qquad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}. \tag{1.2}$$

Здесь ε_0 и μ_0 - соответственно электрическая и магнитная проницаемости вакуума.

Давайте разложим поле по собственным функциям некоторого вспомогательного объема V. Если

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} i \left(\frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{2\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \vec{e}_{\vec{k}} \; a_{\vec{k}} \; e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\vec{r}} + \text{э. с.}, \tag{1.3}$$

тогда согласно уравнениям Максвелла

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} i \left(\frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{2\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \frac{\vec{k} \times \vec{e}_{\vec{k}}}{\mu_0 \omega_{\vec{k}}} \; a_{\vec{k}} \; e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\vec{r}} + \text{э. с.}, \tag{1.4}$$

Здесь $\vec{e}_{\vec{k}}$ - это единичный вектор поляризации, $a_{\vec{k}}$ - амплитуда поля, обезразмеренная нужным нам образом.

Суммирование здесь производится по набору волновых векторов-собственных чисел вспомогательного объема $V = L_x \cdot L_y \cdot L_z$ и индексам поляризации λ:

$$\vec{k} \Rightarrow \begin{cases} 2\pi n_x/L_x\ \vec{i} + 2\pi n_y/L_y\ \vec{j} + 2\pi n_z/L_z\ \vec{k}, \quad n_{x,y,z} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ \\ \lambda = 1, 2. \end{cases}$$

Энергия электромагнитного поля может быть представлена в виде:

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \int\limits_{(V)} d^3 r \left(\, \varepsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r}, t) \; + \; \mu_0 \vec{H}^2(\vec{r}, t) \, \right). \tag{1.5}$$

Подставляя сюда разложение по модам, получим следующее:

$$\mathcal{W} = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} \; |a_{\vec{k}}|^2. \tag{1.6}$$

Давайте вместо комплексных амплитуд $a_{\vec{k}}$ введем в рассмотрение обобщенные канонически сопряженные импульсы и координаты $p_{\vec{k}}$ и $q_{\vec{k}}$:

$$a_{\vec{k}}\; e^{-i\omega_{\vec{k}} t} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\vec{k}}}} \; (p_{\vec{k}} - i\omega_{\vec{k}}\; q_{\vec{k}}). \tag{1.7}$$

Тогда получим следующее выражение для энергии:

$$\mathcal{W} = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{p_{\vec{k}}^2}{2} + \frac{\omega_{\vec{k}}^2 q_{\vec{k}}^2}{2} \right). \tag{1.8}$$

Таким образом, мы видим, что энергия поля складывается из энергии мод, каждая из которых является осциллятором, поскольку энергия моды выражается через обобщенные координаты и импульсы точно так, как для осциллятора. Нетрудно также убедиться в том, что обобщенная координата каждой из мод подчиняется уравнению осциллятора:

$$\ddot{q}_{\vec{k}} + \omega_{\vec{k}}^2 q_{\vec{k}} = 0. \tag{1.9}$$

1.2 Канонический формализм в применении к классическому осциллятору

Напомним, каким образом формулируется канонический подход в теоретической физике. В основу любой теории кладутся так называемые канонические уравнения Гамильтона:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}, \qquad \frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p} \tag{1.10}$$

Здесь H - это так называемый гамильтониан исследуемой системы, а p и q - координата и импульс или, вообще говоря, обобщенные координата и импульс (канонически сопряженная пара).

Гамильтонианом называют энергию системы, выраженную через канонические переменные. В случае осциллятора этот гамильтониан выражается в виде:

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2}. \tag{1.11}$$

Понятно, что этот подход не может дать иных результатов, чем, например, ньютонов подход, где согласно второму закону Ньютона, под влиянием упругой силы, как мы знаем, тело движется согласно дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0. \tag{1.12}$$

В каноническом формализме, применяя уравнения (1.10), нетрудно получить:

$$p = \dot{q}, \qquad \omega^2 q = -\dot{p}. \tag{1.13}$$

Дифференцируя первое равенство по времени и подставляя затем в него второе равенство, получим в точности уравнение (1.12).

Введем в рассмотрение так называемые классические скобки Пуассона, которые определим следующим образом:

$$\{F, G\} \ = \ \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial p} \ - \ \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q}. \tag{1.14}$$

Убедимся в том, что

$$\dot{F} = \{F, H\} \tag{1.15}$$

Действительно,

$$\dot{F}(p,q) = \frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} \,+\, \frac{\partial F}{\partial p}\dot{p}. \tag{1.16}$$

Принимая в расчет канонические уравнения Гамильтона, получим в точности то, что декларировали.

Полагая $F(p,q) = p$ и $G(p,q) = q$, получим

$$\{q,p\} = 1. \tag{1.17}$$

Глава 2

Элементы квантовой электродинамики

2.1 Процедура квантования

Как понятно из предыдущего раздела, переход к квантовой электродинамике можно однозначно связать с процедурой квантования осциллятора. Процедура квантования состоит в следующих шагах:

1. Прежде всего канонические сопряженные переменный объявляются эрмитовскими операторами:

$$p \to \hat{p} = \hat{p}^{\dagger}, \qquad q \to \hat{q} = \hat{q}^{\dagger}; \tag{2.1}$$

При этом канонические уравнения Гамильтона сохраняются в виде:

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{p}} = \dot{\hat{q}}, \qquad \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{q}} = -\dot{\hat{p}}. \tag{2.2}$$

2. Классические скобки Пуассона заменяются на квантовые:

$$i\hbar\{F, G\} \to \left[\, \hat{F}, \hat{G} \,\right] \equiv \hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F}; \tag{2.3}$$

Тогда, в частности, оказывается, что канонические переменные связаны следующим правилом перестановок:

$$[\, \hat{q}, \hat{p} \,] = i\hbar. \tag{2.4}$$

В то же самое время уравнение для произвольного оператора $\hat{F}(\hat{p},\hat{q})$ имеет вид;

$$i\hbar\dot{\hat{F}} = \left[\,\hat{F},\hat{H}\,\right]. \tag{2.5}$$

Это уравнение называется уравнение Гейзенберга, и оно представляет вариант квантовой механики в гейзенберговом представлении. В этом уравнении $\hat{H}$ - это оператор Гамильтона (гамильтониан), который, в частности, для осциллятора имеет вид:

$$\hat{H} \ = \ \frac{\hat{p}^2}{2} \ + \ \frac{\omega^2\hat{q}^2}{2}. \tag{2.6}$$

3. В гейзенберговской картине состояние системы в начальный момент времени задается вектором $|\psi\rangle$ в Гильбертовом пространстве, и это состояние остается неизменным в течение всего времени развития системы.

Задание подобного вектора позволяет вычислять средние значения для физических величин, которые только и могут быть предметом для обсуждения в физическом эксперименте, хотя бы даже мысленном. Чтобы получить среднее значение $\langle F\rangle_t$ (наблюдаемая величина), мы должны провести квантовомеханическую процедуру усреднения:

$$\langle F\rangle_t = \langle\psi|\hat{F}(t)|\psi\rangle. \tag{2.7}$$

2.2 Квантованный осциллятор: операторы рождения и уничтожения квантов

Поскольку канонические уравнения сохранили свою форму по сравнению с с-числовой теорией, то и все гейзенберговы уравнения могут быть легко получены из классических путем простой расстановкой "шляпок"над каноническими переменными. В частности, вместо неоператорных уравнений (1.13)можем записать соответствующие операторные;

$$\hat{p} = \dot{\hat{q}}, \qquad \omega^2\hat{q} = -\dot{\hat{p}}. \tag{2.8}$$

Давайте теперь введем переменную, аналогичную классической амплитуде (1.7):

$$\hat{a}e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\hat{p} - i\omega\hat{q}). \tag{2.9}$$

Перепишем в новых переменных гамильтониан осциллятора:

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \frac{1}{2}\right). \tag{2.10}$$

Здесь было уже принято во внимание перестановочное соотношение:

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}\right] = 1, \tag{2.11}$$

которое автоматически следует из соотношения $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$.

Операторы с подобной алгеброй, обладают следующими свойствами. Прежде всего, эрмитов оператор $\hat{a}^{\dagger}\hat{a}$ обладает целочисленными положительными собственными значениями:

$$\hat{a}^{\dagger}\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots. \tag{2.12}$$

Собственные вектора $|n\rangle$ называются состояниями Фока, а сам оператор называется оператором числа частиц.

Сравнивая последнее равенство с (2.10), можно сказать, что энергия квантового осциллятора пробегает только дискретные значения:

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{2.13}$$

Действие операторов $\hat{a}$ и $\hat{a}^{\dagger}$ на состояния Фока определяются следующими равенствами:

$$\hat{a} \mid n\rangle = \sqrt{n} \mid n-1\rangle, \qquad \hat{a}^{\dagger} \mid n\rangle = \sqrt{n+1} \mid n+1\rangle \tag{2.14}$$

Таким образом, эти операторы имеют смысл операторов уничтожения и рождения колебательных квантов.

2.3 Квантованное электромагнитное поле

Уравнения Максвелла должны быть написаны теперь для операторов:

$$\vec{\nabla} \times \hat{\vec{H}} = \frac{\partial \hat{\vec{D}}}{\partial t}, \qquad \vec{\nabla} \times \hat{\vec{E}} = -\frac{\partial \hat{\vec{B}}}{\partial t}, \tag{2.15}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\vec{B}} = 0, \qquad \vec{\nabla} \cdot \hat{\vec{D}} = 0, \qquad \hat{\vec{B}} = \mu_0 \hat{\vec{H}}, \qquad \hat{\vec{D}} = \varepsilon_0 \hat{\vec{E}}. \tag{2.16}$$

Снова разложим поле по собственным функциям некоторого вспомогательного объема V, тогда

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k}} i \left(\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \vec{e}_{\vec{k}}\ \hat{a}_{\vec{k}}\ e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\vec{r}} + \text{э. с.}, \tag{2.17}$$

$$\hat{\vec{H}}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k}} i \left(\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \frac{\vec{k} \times \vec{e}_{\vec{k}}}{\mu_0 \omega_{\vec{k}}}\ \hat{a}_{\vec{k}}\ e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\vec{r}} + \text{э. с.}, \tag{2.18}$$

где теперь

$$\left[\ \hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}'}\ \right] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}. \tag{2.19}$$

Гамильтониан электромагнитного поля записывается в виде:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int\limits_{(V)} d^3 r \left(\varepsilon_0 \hat{\vec{E}}^2 (\vec{r},t)\ +\ \mu_0 \hat{\vec{H}}^2 (\vec{r},t) \right). \tag{2.20}$$

Применяя разложение по модам вспомогательного объема, получим:

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\hat{p}^2_{\vec{k}}}{2} + \frac{\omega^2_{\vec{k}}\ \hat{q}^2_{\vec{k}}}{2} \right) = \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} \left(a^{\dagger}_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right). \tag{2.21}$$

Глава 3

Квантовые состояния полевого осциллятора: когерентное, сжатое и состояние Фока

3.1 Состояние Фока

Как мы уже упоминали, состоянием Фока принято называть собственное состояние оператора числа фотонов $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$:

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} \mid n >= n \mid n >, \qquad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{3.1}$$

Как известно из математики, в этом случае ввиду эрмитовости оператора числа частиц эти состояния образуют полный ортонормированный набор, то-есть

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mid n \rangle \langle n \mid = 1, \qquad \langle n \mid m \rangle = \delta_{nm}. \tag{3.2}$$

Как понятно, в любом квантовом состоянии те или иные физические параметры флуктуируют около своих средних значений. Например, если какому-то физическому параметру соответствует эрмитов оператор $\hat{A}$, то чтобы охарактеризовать флуктуации этой величины вводят в рассмотрение так называемую среднеквадратичную флуктуацию:

$$(\Delta A^2) = \langle (\hat{A} - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle A \rangle^2. \tag{3.3}$$

Применяя это к числу фотонов, можем написать:

$$(\Delta n^2) = \langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2 = \langle \hat{n} \rangle (1 + \xi). \tag{3.4}$$

Здесь ξ это так называемый статистический параметр Манделя. Для пуассоновского (когерентного) состояния $\xi = 0$, и этот параметр становится отрицательным для неклассических субпуассоновских состояний света. В литературе встречается еще параметр Фано

$$F = 1 + \xi. \tag{3.5}$$

Проследим за флуктуациями некоторых их величин в том случае, когда полевой осциллятор находится в одном из возможных состояний Фока с квантовым числом n, то-есть $\mid n\rangle$. Поскольку в этом случае осциллятор находится в состоянии с определенным числом части, то, естественно, в этом состоянии флуктуации числа частиц должны отсутствовать. Действительно,

$$(\Delta n^2) = \langle n \mid \hat{n}^2 \mid \ n\rangle - \langle n \mid \hat{n} \mid \ n\rangle^2 = 0. \tag{3.6}$$

Одновременно это означает, что в состоянии Фока параметр Манделя ξ равен -1, что, собственно, и говорит нам об отсутствии флуктуаций.

Проследим теперь за среднеквадратичными флуктуациями обобщенных координаты и импульса, которые связаны с операторами рождения и уничтожения фотонов следующим образом

$$\hat{p} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \tag{3.7}$$

$$\hat{q} = i\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \tag{3.8}$$

Таким образом, нетрудно получить, что

$$\langle \hat{p} \rangle = \langle \hat{q} \rangle = 0, \tag{3.9}$$

$$(\Delta p^2) = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad (\Delta\hat{q}^2) = \frac{\hbar}{\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{3.10}$$

Таким образом соотношение неопределенностей для координаты и импульса в этом случае представляется в виде:

$$\sqrt{(\Delta p^2)(\Delta q^2)} = \hbar\left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{3.11}$$

3.2 Когерентное состояние

Согласно математическим воззрениям любому эрмитовскому оператору $\hat{A} = \hat{A}^{\dagger}$ можно сопоставить уравнение для собственных функций и собственных значений:

$$\hat{A} \mid a\rangle = a \mid a\rangle. \tag{3.12}$$

Все собственные значения, естественно, вещественны $a = a^*$, а собственные функции образуют полный ортонормированный набор так, что по ним можно разложить любые вектора состояний. Именно таковым является набор состояний Фока, рассмотренный нами в предыдущем разделе.

В то же самое время некоторым неэрмитовским операторам тоже можно сопоставить уравнение для собственных функций и собственных значений. Например, мы ниже продемонстрируем, что таков неэрмитов оператор уничтожения фотонов $\hat{a}$:

$$\hat{a} \mid \alpha\rangle = \alpha \mid \alpha\rangle. \tag{3.13}$$

Простой подстановкой сюда докажем, что вектор

$$\mid \alpha > = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \mid n > \tag{3.14}$$

является искомым решением. Действительно, подействуем на это состояние оператором уничтожения и убедимся в справедливости равенства (3.13):

$$\hat{a} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \mid n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \hat{a} \mid n\rangle =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{(n-1)!}} \mid n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \mid n\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \mid n > .$$

Собственное состояние оператора уничтожения фотонов называется когерентным состоянием. Раскладывая его по фоковским состояниям в форме (3.14), мы можем заключить, что вероятность найти n фотонов в когерентном состоянии определяется так называемым распределением Пуассона:

$$f(n) = e^{-\langle n\rangle} \frac{\langle n\rangle^n}{n!}, \qquad \langle n\rangle = \mid \alpha \mid^2 . \tag{3.15}$$

Если изображать эту кривую графически как функцию числа частиц n, то это будет симметричная кривая относительно точки $n = \langle n \rangle$. Ширина кривой на полувысоте равна $\sqrt{\langle n \rangle}$. Прямое вычисление дает возможность записать следующие равенства:

$$\langle n \rangle = \mid \alpha \mid^2, \qquad (\Delta n^2) = \langle n \rangle. \tag{3.16}$$

Это означает, что в когерентном состоянии параметр Манделя равен нулю: $\xi = 0$.

Теперь определим соответствующие величины для координаты и импульса:

$$\langle \hat{p} \rangle = \sqrt{2\hbar\omega}\ \alpha', \qquad \langle \hat{q} \rangle = -\sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}}\ \alpha'', \qquad \alpha = \alpha' + i\alpha'', \tag{3.17}$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} \left(4\alpha'^2 + 1 \right), \qquad \langle \hat{q}^2 \rangle = \frac{\hbar}{2\omega} \left(4\alpha''^2 + 1 \right). \tag{3.18}$$

И соответственно для среднеквадратичных флуктуаций:

$$(\Delta p^2) = \frac{\hbar\omega}{2}, \qquad (\Delta q^2) = \frac{\hbar}{2\omega} \tag{3.19}$$

Опять запишем соотношение неопределенностей в этом случае:

$$\sqrt{(\Delta p^2)(\Delta q^2)} = \frac{\hbar}{2}. \tag{3.20}$$

Можно доказать, что когерентное состояние формально генерируется из вакуумного состояния с помощью оператора:

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}} : \qquad \mid \alpha \rangle = \hat{D}(\alpha) \mid 0 \rangle. \tag{3.21}$$

3.3 Квадратурные компоненты и сжатое состояние поля

При описании электромагнитного поля часто оказываются более удобными не обобщенные координата и импульс, а так называемые квадратурные компоненты поля. Они вводятся как реальная и мнимая части оператора уничтожения фотонов:

$$\hat{a} = \hat{X} + i\hat{Y}, \qquad \hat{a}^\dagger = \hat{X} - i\hat{Y}, \qquad \hat{X} = \hat{X}^\dagger, \qquad \hat{Y} = \hat{Y}^\dagger. \tag{3.22}$$

Соответственно эрмитовские операторы квадратур выражаются через комбинации операторов рождения и уничтожения в виде:

$$\hat{X} = \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \qquad \hat{Y} = \frac{i}{2}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \tag{3.23}$$

Нетрудно увидеть, что квадратурные компоненты связаны с координатой и импульсом простыми соотношениями:

$$\hat{p} = \sqrt{2\hbar\omega}\,\hat{X}, \qquad \hat{q} = -\sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}}\,\hat{Y}. \tag{3.24}$$

Тогда нетрудно получить для когерентного состояния, что

$$\langle\hat{X}\rangle = \alpha', \qquad \langle\hat{Y}\rangle = \alpha'', \tag{3.25}$$

$$\langle\hat{X}^2\rangle = \alpha'^2 + \frac{1}{4}, \qquad \langle\hat{Y}^2\rangle = \alpha''^2 + \frac{1}{4}, \tag{3.26}$$

$$(\Delta X^2) = (\Delta Y^2) = \frac{1}{4}, \qquad \sqrt{(\Delta X^2)(\Delta Y^2)} = \frac{1}{4}. \tag{3.27}$$

Обычно в теории сжатым состоянием поля называют такое поля, для которого сохраняется соотношение неопределенностей

$$\sqrt{(\Delta X^2)(\Delta Y^2)} = \frac{1}{4}, \tag{3.28}$$

но флуктуации одной из квадратур оказываются меньшими, чем для когерентного состояния, например, $(\Delta X^2) < 1/4$.

Сжатое состояние может быть сформировано из когерентного состояния воздействием на него оператором:

$$\hat{S}(\xi) = e^{\frac{1}{2}\xi^*\hat{a}^2 - \frac{1}{2}\xi(\hat{a}^\dagger)^2} : \qquad |\,\alpha,\xi\rangle = \hat{S}(\xi)\,|\,\alpha\rangle. \tag{3.29}$$

при произвольном параметре сжатия

$$\xi = re^{i\theta}. \tag{3.30}$$

Можно показать, что при этом соотношение неопределенностей (3.28) действительно сохраняется, хотя флуктуации самих квадратур становятся иными:

$$(\Delta X^2) = \frac{1}{4}\,e^{-r}, \qquad (\Delta Y^2) = \frac{1}{4}\,e^{r}. \tag{3.31}$$

Отсюда видно, что одна квадратура оказывается сжатой, а другая соответственно растянутой.

Глава 4

Волновые функции, матрицы плотности, когерентные представления

4.1 Матрица плотности подсистемы

Как уже было сказано, квантование теории подразумевает некоторую процедуру усреднения с помощью векторов состояния в гильбертовом пространстве $\mid\psi\rangle$. Этот вектор в зависимости от выбора представления может нести в себе полную или частичную временную зависимость, или же вообще не зависеть от времени, как в теории Гейзенберга. Результат усреднения

$$\langle\hat{F}\rangle_t = \langle\psi \mid \hat{F} \mid \psi\rangle, \tag{4.1}$$

разумеется, никак не будет зависеть от того, в каком представлении было произведено вычисление.

Возможен несколько иной подход к процедуре усреднения. Вводят в рассмотрение вместо волновой функции так называемую *матрицу плотности*, а точнее *вектор плотности* в виде проектора:

$$\hat{\mathcal{F}} = \mid\psi\rangle\langle\psi\mid \tag{4.2}$$

и тогда

$$\langle\hat{F}\rangle_t = Sp\left(\,\hat{F}\hat{\mathcal{F}}\,\right) = Sp\left(\,\hat{F}\mid\psi\rangle\langle\psi\mid\,\right), \tag{4.3}$$

Таким образом, матрица плотности позволяет с тем же успехом вычислять нужные нам средние. И если, например, в шредингеровской картине вектор состояния подчиняется уравнению Шредингера

$$i\hbar|\,\dot{\psi}\rangle = \hat{H}\mid\psi\rangle, \tag{4.4}$$

то для матрицы плотности имеет место уравнение фон-Неймана:

$$i\hbar\dot{\hat{\mathcal{F}}} = \left[\,\hat{H},\hat{\mathcal{F}}\,\right]. \tag{4.5}$$

Если исследуется замкнутая система, то ее изучение с помощью вектора состояния или матрицы плотности не имеют никаких преимуществ друг перед другом. Различия наступают только тогда, когда изучается подсистема, взаимодействующая с другими подсистемами. Как известно, невозможно ввести в рассмотрения вектор гильбертова пространства, который мог бы адекватно описывать подобную подсистему. В то же самое время, для подсистемы можно ввести матрицу плотности, которая дает возможность строить все необходимые средние величины, относящиеся к этой подсистеме. Мы сейчас покажем, что матрица

$$\hat{\mathcal{F}}_1 = Sp_{2,3,4,\ldots}\hat{\mathcal{F}} \tag{4.6}$$

как раз обладает таким свойством. Здесь шпурование ведется по всем подсистемам, кроме интересующей подсистемы 1. Действительно, пусть эрмитовский оператор $\hat{A}_1$ представляет некоторую физическую величину, относящуюся к первой подсистеме, тогда мы можем написать следующие равенства:

$$\langle\hat{A}_1\rangle = Sp\left(\,\hat{A}_1\hat{\mathcal{F}}\,\right) = Sp_1\left(\,\hat{A}_1 Sp_{2,3,4,\ldots}\hat{\mathcal{F}}\,\right) = Sp_1\left(\,\hat{A}_1\hat{\mathcal{F}}_1\,\right). \tag{4.7}$$

Таким образом для теоретической обработки подсистемы достаточно о системе иметь усеченную информацию, а именно вместо полной матрицы плотности матрицу плотности подсистемы.

4.2 Диагональное представление Глаубера

Теперь пусть осциллятор находится в каком-то произвольном состоянии, которое описывается матрицей плотности $\hat{\rho}$. Как известно, любая функция может быть разложена по полному ортонормированному набору базисных функций. В качестве такового могут быть взяты собственные функции любого эрмитовского оператора, например, оператора числа частиц. Таким образом можем написать:

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{m,n=0,1,2,3,...} \rho_{mn}(t) \mid m\rangle\langle n \mid \tag{4.8}$$

Набор величин ρ_{mn} составляет матрицу, которая называется *матрицей плотности осциллятора в представлении Фока* или в *представлении чисел заполнения*. Важным обстоятельством является то, что есть возможность дать рецепт для построения коэффициентов разложения:

$$\rho_{mn} = \langle m \mid \hat{\rho} \mid n\rangle. \tag{4.9}$$

Далее мы будем рассматривать очень важное представление, которое ввел Глаубер:

$$\hat{\rho}(t) \;=\; \int d^2\alpha\; P(\alpha, t) \mid \alpha\rangle\langle\alpha \mid \tag{4.10}$$

Здесь производится интегрирование по комплексной плоскости:

$$d^2\alpha \;=\; d(Re\;\alpha)\; d(Im\;\alpha), \qquad \hat{a} \mid \alpha\rangle = \alpha \mid \alpha\rangle. \tag{4.11}$$

Существование подобного представления, вообще говоря, не очевидно, так как если бы когерентные состояния были обычным базисом и образовывали полный набор, то разложение должно было бы быть по $\mid \alpha >< \beta \mid$. Диагональное представление существует вследствие **переполненности** когерентного набора.

Особенность представления состоит в том, что для состояний с выраженными квантовыми свойствами, функция $F(\alpha, t)$ обладает сингулярностями более высокого порядка нежели дельта-функция. Кроме того оно не является положительно определенной функцией. Таким образом хотя условие нормировки соблюдается

$$\int d^2\alpha\; P(\alpha, t) = 1 \tag{4.12}$$

тем не менее эта функция не может быть названа функцией вероятности. За ней закрепилось название квази-вероятности Глаубера.

Для того, чтобы построить P-квази-вероятность, можно воспользоваться следующим алгоритмом:

$$P(\alpha) - \frac{1}{\pi^2} \int d^2\beta\; \langle -\beta \mid \hat{\rho} \mid \beta\rangle e^{|\alpha|^2 + |\beta|^2 - \beta\alpha^* + \beta^*\alpha}. \tag{4.13}$$

Для дальнейшего важно определить то, каким образом действуют операторы рождения и уничтожения в диагональном представлении Глаубера:

$$\hat{a}\hat{\rho} = \int d^2\alpha\ P(\alpha)\hat{a} \mid \alpha >< \alpha \mid = \int d^2\alpha\ \alpha\ P(\alpha)\ \mid \alpha >< \alpha \mid$$

$$\hat{a}^\dagger \hat{F} = \int d^2\alpha\ P(\alpha)\ \hat{a}^\dagger \mid \alpha\rangle\langle\alpha \mid = \int d^2\alpha\ P(\alpha) \left(\alpha^* + \frac{\partial}{\partial\alpha} \right) \mid \alpha\rangle\langle\alpha \mid =$$

$$= \int d^2\alpha \left[\left(\alpha^*\ -\ \frac{\partial}{\partial\alpha} \right) P(\alpha) \right] \mid \alpha\rangle\langle\alpha \mid$$

Действуя таким же образом, можно получить следующую сводку формул:

$$\hat{a}\hat{\rho} \Rightarrow \alpha P(\alpha), \qquad \hat{\rho}\hat{a} \Rightarrow \left(\alpha - \frac{\partial}{\partial\alpha^*} \right) P(\alpha) \tag{4.14}$$

$$\hat{\rho}\hat{a}^\dagger \Rightarrow \alpha^* P(\alpha), \qquad \hat{a}^\dagger\hat{\rho} \Rightarrow \left(\alpha^* - \frac{\partial}{\partial\alpha} \right) P(\alpha). \tag{4.15}$$

Крайне полезным свойством Р-квази-вероятности состоит в том, что она позволяет легко рассчитывать средние от нормально упорядоченных произведений полевых операторов:

$$\langle(\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n\rangle = \int d^2\alpha\ \alpha^{*m}\alpha^n P(\alpha). \tag{4.16}$$

4.3 Другие когерентные представления

Так называемое Q-распределение вводится следующим образом:

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi}\langle\alpha \mid \hat{\rho} \mid \alpha\rangle. \tag{4.17}$$

В отличие от Р-квазивероятности новое распределение не содержит никаких неприятных особенностей и оно точно так же нормируемо:

$$\int d^2\alpha\ Q(\alpha, t) = 1 \tag{4.18}$$

Нетрудно установить связь Q- и Р-функций:

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int d^2\beta P(\beta) e^{-|\alpha-\beta|^2}. \tag{4.19}$$

Точно так же, как P-функция позволяет легко считать нормально-упорядоченные средние, Q-функция хорошо приспособлена для расчета антинормально-упорядоченных средних:

$$\langle \hat{a}^n (\hat{a}^\dagger)^m \rangle = \int d^2\alpha \ \alpha^{*m} \alpha^n Q(\alpha). \tag{4.20}$$

Упомянем еще об одно представлении, которое довольно широко используется на практике. Это так называемое распределение Вигнера-Вейля. Оно связана с P-функцией следующим образом:

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int d^2\beta P(\beta) e^{-2|\alpha-\beta|^2}. \tag{4.21}$$

Эта функция хорошо усредняет симметризованный порядок операторов. Например,

$$\frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger) = \int d^2\alpha \mid \alpha \mid^2 W(\alpha). \tag{4.22}$$

Глава 5

Теоретические методы в квантовой оптике на примере затухающего осциллятора

5.1 Уравнения Гейзенберга-Ланжевена

5.1.1 Затухание классического осциллятора

Принимая в расчет канонические уравнения для осциллятора (1.13) и представление обобщенных координаты и импульса через фотонные операторы, нетрудно получить канонические уравнение не для канонической пары, но для классических безразмерных комплексных амплитуд:

$$\dot{a} = -i\omega\ a, \qquad \dot{a}^* = i\omega\ a^*. \tag{5.1}$$

Для того, чтобы учесть затухание осциллятора, как известно, уравнение надо переписать в виде:

$$\dot{a} + (C/2 + i\omega)\ a = 0. \tag{5.2}$$

Решая уравнение, получим очевидное:

$$a(t) = a(0)\ e^{-C/2\ t}\ e^{-i\omega\ t}. \tag{5.3}$$

Часто удобно вводить в рассмотрение медленно меняющуюся амплитуду:

$$\tilde{a} = a\ e^{i\omega t}. \tag{5.4}$$

Уравнение для этой медленной амплитуды имеет вид:

$$\dot{\tilde{a}} + C/2\, \tilde{a} = 0 \tag{5.5}$$

и соответствующее решение:

$$\tilde{a}(t) = \tilde{a}(0)\, e^{-C/2\, t}. \tag{5.6}$$

5.1.2 Затухание квантованного осциллятора

Согласно общим рецептам уравнения (5.1) при квантовании должны быть переписаны для операторов:

$$\dot{\hat{a}} = -i\omega\, \hat{a}. \tag{5.7}$$

Чтобы учесть затухание, попробуем пойти тем же путем, как в классической теории, то-есть запишем уравнение в форме:

$$\dot{\hat{a}} + (C/2 + i\omega)\, \hat{a} = 0. \tag{5.8}$$

Решение этого уравнения имеет форму:

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)\, e^{-C/2\, t}\, e^{-i\omega\, t}. \tag{5.9}$$

Убедимся сейчас в том, что подобное решение существовать не может в принципе. Действительно,

$$\left[\, \hat{a}(t), \hat{a}^{\dagger}(t)\, \right] = \left[\, \hat{a}(0), \hat{a}^{\dagger}(0)\, \right] e^{-C/2t} = e^{-C/2\, t}, \tag{5.10}$$

но это невозможно, поскольку с точки зрения самых общих положений перестановочное соотношения между одновременными операторами должно сохраняться во времени, то-есть должно быть в любом случае равным единице.

Это означает, что при переходе к уравнению (5.8) мы допустили какую-то некорректность. Согласно хорошо известной флуктуационно-диссипационной теореме затухание обязательно связано с появлением дополнительного источника шума в системе, и в уравнении (5.8) это не учитывается. Давайте перепишем уравнение в соответствие с требованиями флуктуационно-диссипационной теоремы, предварительно переходя к медленно меняющейся амплитуде:

$$\dot{\hat{a}} + C/2\, \hat{a} = \hat{F}(t), \tag{5.11}$$

(в дальнейшем везде знак тильда над медленной переменной опускаем).

Это уравнение называется уравнением Гейзенберга-Ланжевена. Его решение записывается в виде:

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)\, e^{-C/2\, t} + \int_0^t \hat{F}(t')\, e^{-C/2(t-t')}\, dt'. \tag{5.12}$$

Имея в виду это решение, нетрудно получить, что оно обеспечивает правильное коммутационное соотношение при условии, что

$$\langle \hat{F}(t)\hat{F}^\dagger(t')\rangle = C\, \delta(t-t'). \tag{5.13}$$

Все остальные корреляционные функции нужно выбрать равными нулю.

5.2 Кинетическое уравнение (master equation) для матрицы плотности электромагнитного поля

5.2.1 Марковские процессы

Как уже было продемонстрировано, для того, чтобы описать полевой осциллятор, мы должны знать не всю матрицу, но матрицу плотности именно этого осциллятора. Один из возможных подходов в квантовой оптике состоит в том, чтобы попытаться построить замкнутое уравнение для такой матрицы. Разумеется, это не всегда возможно, и система в целом должна обладать некоторыми специфическими особенностями. Как говорят, процесс должен быть марковским, чтобы было возможно описать какую-то группу параметров независимо от остальных параметров.

Предположим , что все физические параметры системы могут быть разделены на две группы, а именно на быстро и медленно меняющиеся во времени. Покажем, каким образом для медленных параметров может быть построено замкнутое уравнение. Действительно, пусть

$$X = x_1, x_2, x_3, \cdots \tag{5.14}$$

набор медленных параметров, скорость изменения которых характеризует так называемое время релаксации X-подсистемы τ_r, и

$$Y = y_1, y_2, y_3, \cdots \tag{5.15}$$

набор быстрых переменных с характерным временным параметром τ_c, определяющим время установления стационарного состояния в отношении быстрых переменных. Итак, мы требуем, что

$$\tau_c \ll \tau_r \tag{5.16}$$

то-есть медленные параметры развиваются гораздо медленнее быстрых.

Очевидно, в общем случае

$$\dot{X} = f\,(\,X\,,\,Y\,)\,, \qquad \dot{Y} = g\,(\,X\,,\,Y\,)\,. \tag{5.17}$$

Рассматривая достаточно большие временные интервалы, что уже наступают стационарные условия для быстрых переменных, но медленные еще не успевают измениться заметным образом:

$$\tau_c \ll t \ll \tau_r \tag{5.18}$$

сможем записать

$$\dot{Y} = 0 \Rightarrow g\,(\,X\,,\,Y\,) = 0 \Rightarrow Y = Y(X) \tag{5.19}$$

В результате имеем

$$\dot{X} = f\,(\,X\,,\,Y\,) \Rightarrow \dot{X} = f\,(\,X\,,\,Y(X)\,) \Rightarrow \dot{X} = G(X) \tag{5.20}$$

Таким образом, для медленных параметров удается записать замкнутое дифференциальное уравнение. В тех случаях, когда это оказывается возможным, говорят о марковском процессе.

Ввиду условия (5.18) производную по времени в уравнении (5.20) следует понимать не в точном смысле слова, а, как говорят, определенной в 'грубой' временной шкале:

$$\dot{F}(t) = \lim_{\Delta t \to 0\ (\Delta t \gg \tau_c)} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} \tag{5.21}$$

Таким образом, уравнение для подсистемы оказывается приближенным, описывающим процесс в 'грубой' временной шкале.

5.3 Уравнение для матрицы плотности затухающего осциллятора

Теперь будем полагать, что матрица плотности осциллятора удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\dot{\hat{\rho}} = -C/2 \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a} - 2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger \right). \tag{5.22}$$

Мы сейчас докажем, что это уравнение для затухающего осциллятора. Умножим уравнение (5.22) на оператор $\hat{a}$ и возьмем шпур, тогда получим следующее:

$$\dot{\langle \hat{a} \rangle} = -C/2 \; \langle \hat{a} \rangle. \tag{5.23}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\langle \hat{a} \rangle_t = \langle \hat{a} \rangle_0 \; e^{-C/2 \; t} \tag{5.24}$$

Как видно, среднее значение комплексной амплитуды затухает со временем со скоростью $C/2$. Однако, это затухание не обязательно связано с потерей энергии полевым осциллятором, но может быть следствием например фазовой диффузии. Чтобы убедиться в энергетической природе затухания, уравнение (5.22) умножим на оператор числа частиц $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ и возьмем шпур:

$$\dot{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle} = -C \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \tag{5.25}$$

Таким образом

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_t = \langle a^\dagger \hat{a} \rangle_0 \; e^{-Ct}. \tag{5.26}$$

Как видим, вследствие затухания число колебательных квантов а значит и энергия осциллятора уменьшается со скоростью C. Таким образом мы можем заключить, что уравнение (5.22) является кинетическим уравнением, описывающим затухание квантованного осциллятора.

5.4 Кинетическое уравнение в представлении Фока

Умножим уравнение (5.22) слева на вектор $\langle n \mid$, а справа на $\mid n' \rangle$. Имея ввиду свойства ортогональности, получим следующее

$$\dot{\rho}_{nn'} = -\frac{C}{2}(n + n') \; \rho_{nn'} + C\sqrt{(n+1)(n'+1)} \; \rho_{n+1n'+1} \tag{5.27}$$

Уравнение для диагональных матричных элементов будет иметь более простой вид:

$$\dot{\rho}_{nn} = -Cn\rho_{nn} + C(n+1)\rho_{n+1n+1} \tag{5.28}$$

Важная особенность этих уравнений состоит в том, что диагональные матричные элементы развиваются только сами через себя. Это сохраняется для любой линии матрицы, параллельной диагональной линии.

5.5 Кинетическое уравнение в представлении Глаубера

Перепишем уравнение (5.22) в следующей форме:

$$\dot{\hat{\rho}} = -C/2\ \hat{R}\ \hat{\rho} \tag{5.29}$$

где $\hat{R}$ - это супероператор, имеющий следующую структуру:

$$\hat{R} = \underset{\longrightarrow}{a^+a} + \underset{\longleftarrow}{a^+a} - 2\,\underset{\rightarrow}{a}\,\underset{\leftarrow}{a^+}\ , \tag{5.30}$$

На этом языке мы можем переформулировать правила перехода к диагональному представлению:

$$\underset{\rightarrow}{a} \quad \Rightarrow \quad \alpha, \tag{5.31}$$

$$\underset{\leftarrow}{a} \quad \Rightarrow \quad \alpha - \frac{\partial}{\partial\alpha^*}, \tag{5.32}$$

$$\underset{\rightarrow}{a^+} \quad \Rightarrow \quad \alpha^* - \frac{\partial}{\partial\alpha}, \tag{5.33}$$

$$\underset{\leftarrow}{a^+} \quad \Rightarrow \quad \alpha^*. \tag{5.34}$$

Из этих правил могут быть получены и другие

$$\underset{\longrightarrow}{a^+a} \quad \Rightarrow \quad \left(\alpha^* - \frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\alpha, \tag{5.35}$$

$$\underset{\longleftarrow}{a^+a} \quad \Rightarrow \quad \left(\alpha - \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right)\alpha^*, \tag{5.36}$$

$$\underset{\longrightarrow}{aa^+} \quad \Rightarrow \quad \alpha\left(\alpha^* - \frac{\partial}{\partial\alpha}\right), \tag{5.37}$$

$$\underset{\longleftarrow}{aa^+} \quad \Rightarrow \quad \alpha^* \left(\alpha \; - \; \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right), \tag{5.38}$$

$$\underset{\rightarrow}{a}\,\underset{\leftarrow}{a^+} \quad \Rightarrow \; |\; \alpha \;|^2, \tag{5.39}$$

$$\underset{\rightarrow}{a^+}\,\underset{\leftarrow}{a} \quad \Rightarrow \quad \left(\alpha^* \; - \; \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \left(\alpha \; - \; \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right). \tag{5.40}$$

Имея в виду эти правила, мы можем теперь записать глауберовское представление для супер-оператора $\hat{R}$:

$$\hat{R} \; = \; \frac{C}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* \right) \tag{5.41}$$

И тогда уравнение (5.22) приобретает вид обычного уравнения в частных производных:

$$\frac{\partial P(\alpha, t)}{\partial t} = \frac{C}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\; \alpha P \; \right) + \text{к. с.} \tag{5.42}$$

К этому уравнению можно подходить, как к обычному уравнению математической физики и стремиться получить его решение, имея в виду стандартные методы математической физики.

Нетрудно понять, что в самом общем виде его решение для момента времени t, более позднего начального t_0, может быть представлено в виде

$$P(\alpha, t) \; = \; \int d^2\alpha_0 \; P(\alpha_0, t_0) \; G(\alpha_0, t_0 \mid \alpha t) \tag{5.43}$$

где функция $P(\alpha, t_0)$ это глауберовское квази-распределение в начальный момент времени (начальное условие для уравнения), G называется функцией распространения. Она по переменным α, t подчиняется тому же самому уравнению, что и для самой функции P, но с другими условиями по времени:

$$G(\alpha_0, t_0 \mid \alpha, t_0) = \delta^2(\alpha \; - \; \alpha_0), \qquad G(\alpha_0, t_0 \mid \alpha, t < t_0) \; = \; 0. \tag{5.44}$$

Нетрудно показать, что

$$G(\alpha_0, t_0 \mid \alpha t) \; = \; \delta^2(\alpha \; - \; \alpha_0 \; e^{-\frac{C}{2} t}) \tag{5.45}$$

и стало быть

$$P(\alpha, t) = e^{C/2 \; t} \; P \left(\; \alpha e^{C/2 \; t}, t_0 \right). \tag{5.46}$$

Теперь с помощью последних выражений получим те же самые законы развития различных средних во времени, которые уже получали раньше.

Сначала вычислим здесь $\langle\hat{a}\rangle_t$). Понятно

$$\langle\hat{a}\rangle_t = \int d^2\alpha\ \alpha\ P(\alpha, t) \tag{5.47}$$

и одновременно

$$\langle\hat{a}\rangle_0 = \int d^2\alpha\ \alpha\ P(\alpha, t_0) \tag{5.48}$$

Принимая во внимание (5.46), получаем:

$$\langle\hat{a}\rangle_t = \langle\hat{a}\rangle_0\ e^{-C/2\ t} \tag{5.49}$$

Как помним это выражение уже неоднократно получалось нами.

Точно таким же образом мы можем получить все другие моменты, которые могут нас интересовать в этом случае. Давайте, например, посмотрим, каким образом развиваются статистические свойства осциллятора при затухании. Одним из важнейших параметров, характеризующих статистические свойства осциллятора, является параметр Манделя ξ, который вводится следующим образом:

$$(\Delta n^2) = \langle\hat{n}\rangle(1+\xi). \tag{5.50}$$

Если $\xi = 0$, осциллятор находится в наиболее близком к классическому состоянию в когерентном состоянии (пуассоновская статистика), при $\xi <\ 0$ — в субпуассоновском состоянии, и при $\xi > 0$— в суперпуассоновском.

Итак, чтобы найти ξ, надо вычислить $\overline{n^2}$:

$$\overline{n^2} = \overline{\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}}\ =\ \overline{a^+a^+a\ a}\ +\ \overline{a^+a} \tag{5.51}$$

Следуя общим правилам, мы можем получить следующее:

$$(\Delta n^2) = \overline{n}(1+\xi_0\ e^{-Ct}) \tag{5.52}$$

Таким образом

$$\xi(t) = \xi_0\ e^{-Ct} \tag{5.53}$$

Это означает, что со временем параметр Манделя стремиться к нулю, то-есть статистика затухающего осциллятора стремиться к пуассоновской, независимо от ξ_0, то-есть от того, каковой она была в начальный момент времени.

5.6 Возбуждение квантованного осциллятора

А теперь исследуем уравнение несколько другое, которое, как покажем далее, описывает возбуждение осциллятора:

$$\dot{\hat{\rho}} = -A/2\hat{S}\hat{\rho} \tag{5.54}$$

где

$$\hat{S} \;=\; \underset{\longrightarrow}{aa^+} \;+\; \underset{\longleftarrow}{aa^+} \;-2\;\underset{\rightarrow}{a^+}\;\underset{\leftarrow}{a}\;. \tag{5.55}$$

Перепишем это уравнение в представлении Глаубера:

$$\frac{\partial P(\alpha,t)}{\partial t} = \left(-\frac{A}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{A}{2}\;\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\alpha^*} \right) P(\alpha,t) + \text{к. с.} \tag{5.56}$$

Запишем уравнение для $\overline{a} \;=\; \overline{\alpha}$, для чего умножим последнее уравнение на α и интегрируем по всем значениям α:

$$\frac{d}{dt}\,\overline{a} \;=\; \left(-i\,\omega \;+\; \frac{A}{2} \right)\,\overline{a} \tag{5.57}$$

Таким образом, получаем нарастающее во времени решение:

$$\overline{a}(t) \;=\; \overline{a}(0)\; e^{-i\omega\,+\,\frac{A}{2}t} \tag{5.58}$$

Уже это говорит о том, что мы имеем дело с возбуждением осциллятора, поскольку амплитуда колебаний нарастает во времени. Но это не единственное следствие, поскольку в кинетическом уравнении помимо первых производных по α присутствуют еще и вторые. Они не дали никакого вклада в уравнение для комплексной амплитуды. Но это не означает, что они не дадут вклада никуда. Убедимся в этом, построив уравнение для $\overline{n}$. Для этого умножаем кинетическое уравнение на $\mid\alpha\mid^2$ и интегрируем по всем значениям α:

$$\frac{d}{dt}\,\overline{n} \;=\; A\,\overline{n} \;+\; A \tag{5.59}$$

Таким образом, уравнение стало неоднородным, что обеспечивает ненулевое решение даже при нулевых начальных условиях. Действительно, решение уравнения записывается в следующем виде:

$$\overline{n}(t) \;=\; (\;\overline{n}(0) \;+\; 1\;)\; e^{At} \;-\; 1 \tag{5.60}$$

Теперь обсудим статистическую ситуацию:

$$\frac{d}{dt}\,\overline{\mid \alpha \mid^4} \;=\; 2\;A\,\overline{\mid \alpha \mid^4} \;+\; 2\;A\,\overline{\mid \alpha \mid^2} \tag{5.61}$$

Решение этого уравнения может быть записано в виде:

$$\overline{\mid \alpha \mid^4}(t) \;=\; \overline{\mid \alpha \mid^4}(0)\; e^{2At} \;+\; 2\;A\;\int_0^t dt'\;\overline{n}(t')\; e^{2A(t-t')} \tag{5.62}$$

Выполняя здесь всевозможные интегрирования, получим

$$\overline{n}(t)\;\xi(t) \;=\; \overline{n}(0)\;\xi(0)\; e^{2At} \tag{5.63}$$

Подставляя сюда выражение для числа квантов, имеем

$$\xi(t) \;=\; \xi(0)\;\frac{\overline{n}(0)\; e^{2At}}{(\;\overline{n}(0)\;+\;1\;)\; e^{At}\;-\;1} \tag{5.64}$$

Как видно, при $\overline{n}(0) \;=\; 0$ параметр Манделя всегда равен нулю. Таким образом, указанный возбудитель осциллятора возбуждает только пуассоновские колебания. В то же самое время при больших значениях начального числа квантов

$$\xi(t) \;=\; \xi(0)\; e^{At} \tag{5.65}$$

Глава 6

Теория фотодетектирования

6.1 Связь поля, выходящего из резонатора, с внутрирезонаторным

Давайте обсудим, каким образом простейшее одномодовое поле, возбуждаемое в высокодобротном резонаторе, может быть детектировано. Пусть $\hat{E}(\vec{r},t)$ - это положительно-частотный оператор электрического поля, распространяющегося в вакууме. Это поле обычно квантуется в кубе с линейным размером L с периодическими граничными условиями. Когда объем куба становится неограниченным $L \to \infty$, этот оператор может быть записан в виде интеграла Фурье по пространственным переменным:

$$\hat{E}(\vec{r},t) = i\left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0}\right)^{1/2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\sqrt{\omega_{\vec{k}}}\,\hat{a}(\vec{k})\,e^{i\vec{k}\vec{r}-i\omega_{\vec{k}}t}. \tag{6.1}$$

Здесь ε_0 это диэлектрическая проницаемость вакуума, и в свободном пространстве $\omega_{\vec{k}} = kc$. Операторы $\hat{a}(\vec{k})$ и $\hat{a}^\dagger(\vec{k})$ подчиняются каноническим перестановочным соотношениям:

$$\left[\,\hat{a}(\vec{k}),\hat{a}^\dagger(\vec{k}')\,\right] = (2\pi)^3\delta(\vec{k}-\vec{k}'), \qquad \left[\,\hat{a}(\vec{k}),\hat{a}(\vec{k}')\,\right] = 0. \tag{6.2}$$

Мы хотим изучать одномодовое поле, которое формируется внутри высокодобротного резонатора в процессе лазерной генерации. Будем полагать, что вышедшая из резонатора волна является плоской квазимонохроматической волной. Тогда интеграл (6.5) может быть деформирован в следующее выражение:

$$\hat{E}_{out}(\vec{r}, t) = i \left(\frac{c\hbar\omega_0}{2\varepsilon_0 c} \right)^{1/2} \ e^{ik_0 z - i\omega_0 t} \ \hat{a}_{out}(t), \tag{6.3}$$

где

$$\hat{a}_{out}(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \ \hat{a}(\omega) \ e^{-i(\omega - \omega_0)t}, \tag{6.4}$$

$$\left[\ \hat{a}(\omega), \hat{a}^\dagger(\omega') \ \right] = 2\pi\delta(\omega - \omega'). \tag{6.5}$$

Здесь индекс *out* указывает на то, что мы стараемся написать выражение для электромагнитного поля, вышедшего из резонатора.

Теперь нетрудно получить, что

$$\left[\ \hat{a}_{out}(t), \hat{a}^\dagger_{out}(t') \ \right] = \delta(t - t'), \qquad [\ \hat{a}_{out}(t), \hat{a}_{out}(t') \ ] = 0. \tag{6.6}$$

Важная особенность этого выражения состоит в том, что оно совершенно не зависит от того, что происходит с полем в резонаторе.

Как ясно из предыдущего, внутрирезонаторной волне могут быть сопоставлены фотонные операторы $\hat{a}_{in}$ и $\hat{a}^\dagger_{in}$, чья алгебра определяется коммутационным соотношением

$$\left[\ \hat{a}_{in}(t), \hat{a}^\dagger_{in}(t) \ \right] = 1. \tag{6.7}$$

Смысл операторов $\hat{a}_{in}$ и $\hat{a}_{out}$ разный. Это видно хотя бы по размерностям: если смотреть на коммутационные соотношения, то видно, что оператор $\hat{a}_{in}$ безразмерный, а оператор $\hat{a}_{out}$ имеет размерность $\sec^{-1/2}$. Оператор $\hat{a}^\dagger_{in}\hat{a}_{in}$ имеет смысл оператора числа частиц в резонаторе, а оператор $\hat{a}^\dagger_{out}\hat{a}_{out}$ имеет смысл оператора числа частиц, пролетающих снаружи резонатора через поперечное сечение луча в единицу времени.

Понятно, что между *in*- и *out*-операторами должна быть связь, которая может быть качественно установлена следующим образом. Если в резонаторе N фотонов, то поток фотонов изнутри резонатора на внутреннюю поверхность выходного зеркала будет равна

$$cN/V \ S = c/L \ N. \tag{6.8}$$

Здесь c - скорость света в вакууме, $V = L \cdot S$, L - периметр резонатора, S - поперечное сечение резонатора. Чтобы определить поток уже снаружи резонатора, нам надо умножить это выражение на коэффициент пропускания зеркала, что дает наружный поток в виде CN, где $C = cT^2/L$ - это спектральная модовая ширина. В этой связи будем писать соотношение между внутренними и внешними амплитудами поля в следующем виде:

$$\hat{a}_{out} = \sqrt{C}\ \hat{a}_{in} - \hat{a}_{vac.}, \qquad \hat{a}^{\dagger}_{out} = \sqrt{C}\ \hat{a}^{\dagger}_{in} - \hat{a}^{\dagger}_{vac}. \tag{6.9}$$

Здесь добавлены вакуумные амплитуды, которые дают вклад в интересующую нас амплитуду вследствие отражения от зеркала: выходное зеркало смешивает с точки зрения квантовой электродинамики два потока, а именно одного, идущего из резонатора через выходное зеркало, и другого, идущего из свободного пространства, которое подмешивается при отражении от зеркала. Эта добавка является принципиально важной, так именно она обеспечивает соблюдение коммутационных соотношений (6.6) и их независимость от того, что происходит реально внутри резонатора.

Поскольку вакуумные амплитуды описываю распространение вакуумного поля в свободном пространстве, то для них мы обязаны написать коммутационныен соотношения вида:

$$\left[\ \hat{a}_{vac.}(t), \hat{a}^{\dagger}_{vac.}(t')\ \right] = \delta(t - t'), \qquad [\ \hat{a}_{vac.}(t), \hat{a}_{vac.}(t')\ ] = 0. \tag{6.10}$$

Мы можем ввести в рассмотрение эрмитовский оператор

$$\hat{i}(t) = \hat{a}^{\dagger}_{out}(t)\ \hat{a}_{out}(t), \tag{6.11}$$

который имеет смысл оператора числа фотонов, пробегающих в единицу времени через поперечное сечение луча. В случае идеального фотодетектирования мы сопоставляем это с оператором фототока.

Для гомодинного балансного детектирования, когда локальный осциллятор находится в когерентном состоянии с амплитудой β, оператор фототока может быть переписан в виде:

$$\hat{i}(t) = \beta^*\ \hat{a}_{out}(t) + \beta\ \hat{a}^{\dagger}_{out}(t), \tag{6.12}$$

Таким образом мы имеем возможность, выбирая фазу локального осциллятора, выделять на фотодетекторе ту или иную квадратурную компоненту поля.

Давайте теперь построим корреляционную функцию вида:

$$\langle \hat{i}(t)\ \hat{i}(t')\rangle = \langle \Big(\beta^*\ \hat{a}_{out}(t) + \beta\ \hat{a}^\dagger_{out}(t) \Big) \Big(\beta^*\ \hat{a}_{out}(t') + \beta\ \hat{a}^\dagger_{out}(t') \Big)\rangle =$$
$$= |\beta|^2\ \delta(t-t') + \beta^2 \langle \hat{a}^\dagger_{out}(t) \hat{a}^\dagger_{out}(t')\rangle + |\beta|^2\ \langle \hat{a}^\dagger_{out}(t)\hat{a}_{out}(t')\rangle +$$
$$+\beta^* 2 \langle \hat{a}_{out}(t')\hat{a}_{out}(t)\rangle + |\beta|^2\ \langle \hat{a}^\dagger_{out}(t')\hat{a}_{out}(t)\rangle \qquad (6.13)$$

Теперь это нетрудно выразить через внутрирезонаторные операторы, причем в силу нормального упорядочения операторов вакуумные составляющие вклада давать не будут:

$$\langle \hat{i}(t)\ \hat{i}(t')\rangle = |\beta|^2\ \delta(t-t') + C \Big[\ \beta^2 \langle \hat{a}^\dagger_{in}(t)\hat{a}^\dagger_{in}(t')\rangle + |\beta|^2\ \langle \hat{a}^\dagger_{in}(t)\hat{a}_{in}(t')\rangle +$$
$$+\beta^{*2}\langle \hat{a}_{in}(t')\hat{a}_{in}(t)\rangle + |\beta|^2\ \langle \hat{a}^\dagger_{in}(t')\hat{a}_{in}(t)\rangle\ \Big]\,. \qquad (6.14)$$

Под знаком усреднения мы теперь можем заменить операторы на глауберовские с-амплитуды:

$$\langle \hat{i}(t)\ \hat{i}(t')\rangle = |\beta|^2\ \delta(t-t') + C \Big[\ \beta^2 \overline{\alpha^*_{in}(t)\ \alpha^*_{in}(t')} + |\beta|^2\ \overline{\alpha^*_{in}(t)\ \alpha_{in}(t')} +$$
$$+\beta^{*2}\overline{\alpha^*_{in}(t)\ \alpha^*_{in}(t')} + |\beta|^2\ \overline{\alpha^*_{in}(t')\ \alpha_{in}(t)}\ \Big]\,. \qquad (6.15)$$

Теперь можно перейти от физических величин к их флуктуациям:

$$\delta\hat{i} = \hat{i} - \bar{i}, \qquad \delta\alpha_{in} = \alpha_{in} - \sqrt{N} \qquad (6.16)$$

и переписать функцию корреляций фототоков в виде:

$$\langle \delta\hat{i}(t)\ \hat{\delta} i(t')\rangle/|\beta|^2 = \delta(t-t') + C/N\ \langle \varepsilon(t)\ \varepsilon(t')\rangle, \ \ (\beta = \beta^*), \qquad (6.17)$$

где флуктуации числа фотонов выражаются как реальная часть флуктуаций амплитуды в виде:

$$\varepsilon = \sqrt{N}(\delta\alpha^*_{in} + \delta\alpha_{in}) \qquad (6.18)$$

и

$$\langle \delta\hat{i}(t)\ \hat{\delta} i(t')\rangle/|\beta|^2 = \delta(t-t') + 4CN\ \langle \delta\varphi(t)\ \delta\varphi(t')\rangle, (\beta = -\beta^*) \qquad (6.19)$$

где флуктуации фазы выражаются через мнимую часть флуктуаций амплитуды в виде:

$$\delta\varphi = \sqrt{N}(\delta\alpha^*_{in} - \delta\alpha_{in}). \qquad (6.20)$$

Это можно переписать в спектральном представлении:

$$\langle \delta\hat{i}_\omega \; \hat{\delta i}_{\omega'} \rangle / |\beta|^2 = \delta(\omega + \omega') + C/N \; \langle \varepsilon_\omega \; \varepsilon_{\omega'} \rangle, \tag{6.21}$$

$$\langle \delta\hat{i}_\omega \; \hat{\delta i}_{\omega'} \rangle / |\beta|^2 = \delta(\omega + \omega') + 4CN \; \langle \delta\varphi_\omega \; \delta\varphi_{\omega'} \rangle, \tag{6.22}$$

где

$$\delta i_\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \; \delta i(t) \exp(i\omega t), \tag{6.23}$$

$$\varepsilon_\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \; \varepsilon(t) \exp(i\omega t), \tag{6.24}$$

$$\delta\varphi_\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \; \delta\varphi(t) \exp(i\omega t). \tag{6.25}$$

Мы предполагаем, что мы исследуем стационарные световые потоки, тогда мы должны потребовать, что

$$\langle \delta\hat{i}_\omega \; \hat{\delta i}_{\omega'} \rangle = (\delta i^2)_\omega \; \delta(\omega + \omega'), \tag{6.26}$$

$$\langle \varepsilon_\omega \; \hat{\varepsilon}_{\omega'} \rangle = (\varepsilon^2)_\omega \; \delta(\omega + \omega'), \tag{6.27}$$

$$\langle \delta\varphi_\omega \; \hat{\delta}\varphi_{\omega'} \rangle = (\delta\varphi^2)_\omega \; \delta(\omega + \omega'). \tag{6.28}$$

Тогда для спектральных плотностей могут быть написаны следующие формулы:

$$(\delta i^2)_\omega = |\beta|^2 \left[\; 1 + C/N \; (\varepsilon^2)_\omega \; \right], \tag{6.29}$$

$$(\delta i^2)_\omega = |\beta|^2 \left[\; 1 + 4CN \; (\delta\varphi^2)_\omega \; \right]. \tag{6.30}$$