

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

на правах рукописи

Королев Сергей Борисович

**Многочастичные перепутанные состояния света для
однонаправленных квантовых вычислений**

Научная специальность 01.04.05 –
«Оптика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук, профессор
Голубева Татьяна Юрьевна

Санкт-Петербург
2020

Оглавление

Введение	4
1 Обзор литературы	10
1.1 Преимущества и специфика квантовых вычислений	10
1.2 Модели квантовых вычислений	11
1.3 Применение телепортации в квантовых вычислениях	13
1.4 Кластерные состояния	15
1.4.1 Кластерные состояния в дискретных переменных	16
1.4.2 Кластерные состояния в непрерывных переменных	19
1.5 Квантовые коды коррекции ошибок	26
1.5.1 Квантовые коды коррекции ошибок для дискретных переменных	26
1.5.2 Квантовые коды коррекции ошибок	28
1.5.3 Квантовые коды коррекции ошибок для непрерывных переменных	29
2 Критерий оценки минимального сжатия для генерации кластерных состояний	33
2.1 Преобразование Боголюбова для кластерных состояний	33
2.2 Критерий минимальной степени сжатия	36
2.3 Заключение по главе 2	43
3 Классификация кластерных состояний по типу вычислений	44
3.1 Классификация кластерных состояний	45
3.2 Случай вычислений, когда входные состояния примешиваются к выходным ($n=m$)	46
3.2.1 Квантовые преобразования, реализуемые в данной схеме вычислений	50
3.3 Случай вычислений, когда входные состояния примешиваются к выходным ($n>m$)	52
3.3.1 Квантовые преобразования, реализуемые в данной схеме вычислений	55
3.4 Случай вычислений, когда входные состояния примешиваются к измеряемым кластерным узлам ($n \leq 2m$)	57
3.4.1 Квантовые вычисления, реализуемые в данной схеме вычислений	58

3.5	Случай вычислений, когда входные состояния прицепиваются к измеряемым узлам кластера ($n > 2m$)	60
3.5.1	Квантовые вычисления реализуемые в данной схеме	62
3.6	Заключение по главе 3	66
4	Минимизация ошибок однонаправленных вычислений	67
4.1	Не модифицированные однонаправленные квантовые вычисления	68
4.1.1	Одномодовые преобразования	68
4.1.2	Двухмодовое преобразование CZ	71
4.2	Квантовые вычисления за пределами модели однонаправленных вычислений	71
4.2.1	Одномодовые преобразования	72
4.2.2	Преобразование CZ	76
4.3	Заключение по главе 4	80
	Заключение	82
	Литература	83
A	Независимость ошибок вычислений от способа генерации кластерного состояния	92
B	Формулы Фробениуса	94
C	Решение системы уравнений для случая вычислений, когда входные состояния прицепиваются к измеряемым узлам кластера ($n = 2m$)	95
D	Вид матрицы ошибок для случая вычислений $n > 2m$. Первый случай обращения матрицы M	97
E	Вид матрицы ошибок для случая вычислений $n > 2m$. Второй случай обращения матрицы M	98
F	Матрицы ошибок, получаемые в результате реализации одномодовых преобразований на четырехузловых кластерных состояниях	99
G	Общий вид разложения Блоха-Мессиа для матриц (3.80)-(3.84)	100

Введение

Данное диссертационное исследование направлено на изучение однонаправленных квантовых вычислений на кластерных состояниях в непрерывных переменных.

Впервые возникнув в 80х годах прошлого века [1–3], идея создания квантового компьютера до сих пор не получила полноценной практической реализации, и потому остается значимой и актуальной. Главным образом интерес к этой задаче вызван неприменимостью классического принципа вычислений к решению некоторых задач. К таким задачам можно, например, отнести факторизацию больших целых чисел, задачу моделирования поведения многочастичных квантовых систем, различные задачи оптимизации и многие другие. Все эти задачи относятся к так называемому "экспоненциальному" классу, поскольку время их решения алгоритмами классического компьютера растет экспоненциально с ростом числа входных данных. Другими словами, классический компьютер потратит нецелесообразно высокие ресурсы для решения задач этого класса. Для квантовых компьютеров, благодаря заложенным в них принципам квантового параллелизма и квантовой телепортации, некоторые из этих задач носят уже "полиномиальный" характер и могут быть решены с использованием квантовых алгоритмов (например, алгоритм Шора [4] и Гровера [5]) сравнительно быстро.

Первые предложенные модели квантовых компьютеров были идейно очень схожи с моделями классических компьютеров. В этих моделях для выполнения операций над входными состояниями использовались приборы (квантовые гейты), выполняющие элементарные унитарные преобразования. Вычисления в таком подходе являются обратимыми по аналогии с вентилем Тоффли [6] в классическом компьютере. К сожалению, такая простая модель оказалась сложна в практической реализации. Все предложенные способы создания квантовых компьютеров, использующих данную модель вычислений, упираются в проблему масштабируемости. С экспериментальной точки зрения очень сложно организовать процесс вычислений с большим числом физических систем так, чтобы все системы могли взаимодействовать друг с другом и при этом были хорошо изолированы от окружения. По этой причине продолжаются поиски альтернативных вычислительных моделей [7–9]. Одной из таких моделей является модель однонаправленных квантовых вычислений.

Однонаправленные вычисления основаны на проведении локальных измерений над квантовыми многочастично-перепутанными состояниями, называемыми кластерными. Согласно теореме о редукции, при измерении квантового состояния оно необратимо разрушается, однако изменяя при этом контролируемым образом подсистемы, связанные с ней квантовой

запутанностью. Таким образом, тип преобразований, получаемый в данной вычислительной модели, зависит от выбора базисов измерительных приборов, а также от конфигурации кластерного состояния (от числа узлов и от числа связей между узлами). В ранних исследованиях было продемонстрировано [10], что такая модель является универсальной и ничуть не уступает по вычислительным мощностям классической модели. Универсальность модели означает, что с ее помощью можно выполнять любые квантовые преобразования над входными логическими состояниями, что и является основной функцией квантового компьютера.

На сегодня предложены различные схемы однонаправленных квантовых вычислений как для дискретных [11, 12], так и для непрерывных переменных [13], некоторые из которых были успешно реализованы экспериментально [14, 15]. При этом основным препятствием к осуществлению на их основе эффективных информационных приложений, является ограничение на размерность и конфигурацию кластерных состояний. Значительную роль при этом играет тип переменных, с помощью которых описывается физическая система, так как именно он определяет характер этих ограничений.

В случае дискретных переменных кластерное состояние генерируется на отдельных, независимых кубитах (или кудитах [16]). В качестве ограничения для генерации кластерного состояния большой размерности при этом будет выступать вероятностный характер проводимых операций: получение единичных фотонов, осуществление перепутывания между кубитами и т.д. Вследствие малой эффективности этих процессов генерация кластерного состояния большой размерности на практике может занимать чересчур большое время, существенно превышающее время декогеренции отдельных кубитов.

Для непрерывных переменных все операции над системами (осцилляторами) в гауссовском квадратурно-сжатом состоянии, на основе которых генерируется кластерное состояние, носят детерминистический характер. В этом случае ограничения для генерации кластерного состояния уже связаны с конечной степенью квадратурного сжатия осцилляторов. Как известно, величина перепутанности квантовых осцилляторов зависит от степени их сжатия. Интуитивно понятно, что для генерации кластерных состояний с большим числом перепутанных узлов необходимы осцилляторы с большой степенью сжатия. На практике приготовление таких осцилляторов сопряжено с трудностями [17].

Важно отметить, что на сегодняшний день вопрос о конфигурации кластерных состояний, необходимых для реализации универсальных одномодовых преобразований, остается открытым. То есть нет никакой уверенности, что для вычислений оптимальной стратегией будет использование больших кластерных состояний (с большим числом узлов). Кроме того, до сих пор не ясно как конфигурация кластерных состояний влияет на тип реализуемых вычислений. В представленном диссертационном исследовании мы постарались найти ответы на эти вопросы.

Исходя из всего вышесказанного, можно с уверенностью заявить, что тематика представленного исследования является **актуальной**.

Целью данной работы является разработка методов построения кластерных состояний в непрерывных переменных, которые были бы оптимальным ресурсом для выполнения однонаправленных вычислений.

Для достижения этой цели были поставлены и решены следующие задачи:

1. Проанализировать конфигурации кластерных состояний с точки зрения степени перепутанности многочастичного состояния. Выявить условия на связь между степенью сжатия исходных осцилляторов и конфигурацией кластерного состояния.
2. Построить общую теории гауссовых вычислений в рамках кластерной идеологии. Выявить конфигурации кластерных состояний обеспечивающие возможность проведения универсальных вычислений.
3. Оценить ошибки гауссовых вычислений для всех возможных универсальных конфигураций кластеров. Выйти за рамки стандартной модели однонаправленных вычислений, оценить ошибки гибридных схем вычислений.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Получен простой инструмент оценки возможности построения несепарабельного кластерного состояния на основе имеющегося фиксированного ресурса сжатия и явного вида конфигурации кластера.
2. Получено условие на сжатие каждого исходного квантового осциллятора необходимое для построения кластерного состояния заданной конфигурации. Указано, как рассчитывать максимальное число связей узлов кластера.
3. Найдено пять минимальных (четырёхузловых) конфигураций кластерных состояний, с помощью которых можно реализовывать универсальные одномодовые преобразования. Показано, что других кластерных конфигураций, отвечающих условию универсальности и не увеличивающих ошибку вычислений, не существует.
4. Показано, что, как само преобразование, так и ошибки вычислений зависят лишь от конфигураций кластерного состояния, но не от способа его получения.
5. Доказано, что, если число узлов кластерного состояния превосходит удвоенное число входных мод, то вычисления в таком случае могут быть универсальными.
6. Показано, что минимальная ошибка квантовых однонаправленных вычислений получается при использовании двухузловых кластерных состояний в совокупности с дополнительными устройствами типа фазовращателей.

Научная новизна:

1. Впервые сформулирована в виде теоремы зависимость конфигураций кластерных состояний от степени минимального сжатия осцилляторов, используемых для их генерации. Это условие в совокупности с конкретными схемами генерации кластеров позволило сформулировать параметры для конкретных экспериментов.
2. Предложена общая классификация кластерных состояний на основе числа входных мод и числа узлов кластера, а также их функции в процедуре вычисления. Данная классификация позволила отсортировать конфигурации для универсальных Гауссовых операций.
3. Проанализировано два подхода к выполнению гауссовых операций: обычная модель одноподанных вычислений и гибридная схема, включающая вычисления на кластерах, дополненные элементами линейной оптики. Показано, что второй подход позволяет снизить ошибку вычислений.
4. Предложен рецепт построения вычислительной процедуры, приводящей к минимальным ошибкам.

Научная и практическая значимость

Полученные результаты имеют фундаментальную научную значимость с точки зрения разработки новых теоретических подходов к проблеме одноподанных квантовых вычислений на физических системах в непрерывных переменных, оценки возможности генерации кластеров различных конфигураций, а также оценки влияния неидеальности реальных физических систем на процесс вычислений. Результаты исследования можно использовать для практической реализации универсального квантового компьютера или квантового симулятора. Обладание такими устройствами открывает большие возможности решения задач разработки новых материалов, фармакологических задач, задач блокчейн технологий или задач создания искусственного интеллекта. Кроме того, с помощью квантового компьютера можно точно решать сложные системы дифференциальных уравнений, задачи оптимизации, а также моделировать многокомпонентные физические или химические системы.

Степень достоверности полученных в диссертации результатов достигается за счет корректного использования методов квантовой-механики и строгого физического обоснования всех приближений и предположений, используемых в работе. Для решения поставленных задач был использован математический аппарат квантовой электродинамики, хорошо зарекомендовавший себя ранее. Построенная теоретическая модель обобщает результаты, полученные другими исследователями. Полученные результаты обсуждались в рамках научных семинаров, школ и конференций, а также были опубликованы в рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК.

Апробация работы Основные результаты работы докладывались на следующих научных конференциях, школах, семинарах и воркшопх:

- Научный семинар Лаборатории квантовой оптики, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия, 2016).
- IX Международная конференция молодых ученых и специалистов "Оптика-2015" (Санкт-Петербург, Россия, 12-16 октября, 2015).
- Summer School 2016 (Quantum Information, Spintronics, Metamaterials) organized by the Russian Quantum Center (Moscow, Russia, Aug 22 - 27, 2016).
- X семинар имени Д.Н. Клышко (Москва, Россия, 23-25 апреля, 2017).
- X International Conference of Young Scientists and Specialists "Optics-2017" (St.Petersburg, Russia, 16-20 October, 2017).
- XXII Международная молодежная научная школа "Когерентная оптика и оптическая спектроскопия" (Казань, Россия, Октябрь 9-11, 2018).
- 2-я Российская школа по квантовым технологиям (Красная поляна, Сочи, Россия, 2-9 марта, 2019).
- XVI International Conference on Quantum Optics and Quantum Information (Minsk, Belarus, 2019).
- XXVIII International Laser Physics Workshop (LPHYS'19) (Gyeongju, South Korea, 8-12 July, 2019).
- XIII Международные чтения по квантовой оптике (IWQO-2019) (Владимир, Россия, 9-14 сентября, 2019).
- 3rd International School on Quantum Technologies (Krasnaya Polyana, Sochi, Russia, 1-7 March, 2020).

Личный вклад. Основные результаты, представленные в диссертации, получены автором лично; выбор направления исследования, постановка и обсуждение рассматриваемых задач осуществлялись совместно с научным руководителем.

Публикации Основное содержание и результаты по теме диссертации представлены в следующих публикациях:

- S.B. Korolev, T. Yu. Golubeva, Yu. M. Golubev. Finding the optimal cluster state configuration. Minimization of one-way quantum computation errors. // Laser Phys. Lett., 2020, 17, 055205..
- S.B. Korolev, T. Yu. Golubeva, Yu. M. Golubev. Finding the optimal cluster state configuration. Cluster state classification by type of computations. // Laser Phys. Lett., 2020, 17, 035207.

- S.B. Korolev, A.N. Dobrotvorskaia, T.Yu. Golubeva, Yu.M. Golubev. Quantum computations on the ensemble of two-node cluster states, obtained by sub-Poissonian lasers.// Laser Phys. Lett., 2019, 16, 075204.
- К.С. Тихонов, А.Д. Манухова, С.Б. Королев, Т.Ю. Голубева, Ю.М. Голубев, Управляемый логический вентиль на четырехузловом линейном гибридном кластерном состоянии, Оптика и спектроскопия, 2019, 11, 811.
- S.B. Korolev, E. A. Vashukevich, T.Yu. Golubeva, Yu.M. Golubev. On the mathematical and physical approaches to constructing a quantum cluster state in continuous variables, or is it possible to build a cluster of different modes? // Quantum Electron., 2018, 48(10), 906-911.
- S.B. Korolev, A. D. Manukhova, K. S. Tikhonov, T. Y. Golubeva and Y. M. Golubev. Criteria of minimum squeezing for quantum cluster state generation.// Laser Phys. Lett., 2018, 15, 075203.
- S.B. Korolev, K.S. Tikhonov, T.Yu. Golubeva, Yu.M. Golubev. Clusters on the Basis of Bright Multimode Light in a Mixed State. // Optics and Spectroscopy, 2017, 123 (3), 411–418.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и семи приложений. Полный объем диссертации составляет 100 страниц с 18 рисунками. Список литературы содержит 117 наименований.

Глава 1

Обзор литературы

1.1 Преимущества и специфика квантовых вычислений

Без компьютерных технологий сложно представить себе жизнь в современном обществе. Компьютер используется повсеместно. Например, для кодирования/декодирования информации при выполнении различных платежей, для улучшения социальной жизни общества (анализ больших данных) и т.д.. В научном мире компьютер необходим как для численных расчетов сложных систем, так и для визуализации полученных данных.

По определению, компьютер – это устройство, способное преобразовывать входную информацию в выходную желаемым образом. В качестве основной единицы информации в классическом компьютере используется бит, который может принимать два значения: 0 или 1. Любая информация может быть закодирована с помощью битовых строк (строк нулей и единиц). Для преобразования битовых строк используются логические элементы (гейты), каждый из которых выполняет элементарную логическую операцию. Совокупность этих логических элементов реализует некоторую функцию в зависимости от типа и порядка используемых элементов.

Как уже отмечалось, классический компьютер может решать множество разнообразных задач. Однако, существуют задачи, которые классический компьютер решает не очень хорошо. Например, задача точного предсказания погоды. Для решения этой задачи требуется решать нелинейные уравнения, которые даже суперкомпьютер может решать лишь численно с некоторыми приближениями. В физике таких задач великое множество. Теоретическая информатика занимается классификацией таких задач по классам сложности. Выделяются несколько классов: полиномиальный класс сложности (P класс) и экспоненциальный класс. К классу P относятся задачи, время решения которых полиномиально зависит от числа входных данных. Например, сложение целых чисел, умножение, деление, умножение матриц, выяснения связности графов, сортировка множеств. Классический компьютер способен хорошо и быстро решать задачи данного класса сложности. К экспоненциальному относятся задачи, время решения которых растет экспоненциально с числом данных на входе, в частности, задачи построения всех подмножеств заданного множества, задача коммивояжера, задача

моделирования реальной молекулы и задача факторизации больших целых чисел. Классический компьютер в решении задач данного класса практически бесполезен. Единственное, что может классический компьютер – это проверять правильность решения некоторых задач из экспоненциального класса.

Для решения задач экспоненциальной сложности был придуман концепт квантовых вычислений. Первые идеи использования квантовой механики в компьютерных технологиях были выдвинуты Ю. М. Маниным [1] и Р. Фейнманом [2]. По определению, квантовый компьютер – это устройство, способное производить вычисления, оперируя квантовыми состояниями кубитов. Кубит – это единица квантовой информации. В отличие от классического бита, который может принимать только два значения 0 или 1, кубит может находиться в суперпозиции двух квантовых базисных состояний $|\Psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$, где $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Из-за наличия суперпозиции n кубитов могут одновременно быть в 2^n различных состояниях, в то время как n классических битов всегда находятся только в одном состоянии. В результате этого при выполнении операций над кубитами мы изменяем сразу 2^n состояний вместо одного в классическом компьютере. Это обеспечивает квантовый параллелизм вычислений, который и дает возможность квантовому компьютеру решать некоторые задачи экспоненциального класса сложности за полиномиальное время [4, 5, 18]. К таким задачам, например относятся задачи факторизации целых чисел (Алгоритм Шора [4]); задача нахождения решения уравнения $f(x) = 1$, где f – это булева функция от n переменных (алгоритм Гровера [5]); задача определения того, является ли булева функция нескольких переменных $g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ постоянной (принимает все время либо значение 0, либо 1) или сбалансированной (для половины параметров области определения принимает значение 0, а для другой половины – 1).

Для практической реализации кубитов используют квантовомеханические системы, которые имеют два базисных состояния. Например, можно использовать ионы или атомы в лазерных ловушках [19] или ядерные спины молекул растворов [20]. На заре квантовых вычислений последние системы считались наиболее перспективными. Так, например, в работе [21] было экспериментально продемонстрировано когерентное управление системы из двенадцати ЯМР-кубитов, а в [22] была даже представлена реализация алгоритма Шора на квантовом ЯМР компьютере. На сегодняшний день эти системы практически не рассматриваются, поскольку они не масштабируемы до большого числа кубитов. Помимо уже представленных, активно развиваются сверхпроводящие кубиты, которые представляют из себя микросхемы из сверхпроводника с нелинейными элементами (джозефсоновскими переходами) [23, 24]. Также можно выделить кубиты на квантовых точках [25] и фотонные кубиты [26–28].

1.2 Модели квантовых вычислений

Принцип действия первых моделей квантовых компьютеров очень схож с классическими. На первом этапе классическая информация кодируется на квантовых кубитах. В результате

состояние всех этих кубитов мы можем записать, например, в виде $|\Psi\rangle_{in}$. После этого входное квантовое состояние отправляется на вход квантового преобразователя, который преобразует его унитарным образом. В результате у нас остается выходное преобразование, которое связано с входным следующим образом $|\Psi\rangle_{out} = \hat{U}|\Psi\rangle_{in}$. Любое желаемое преобразование кубитов $\hat{U}$ получается последовательным применением цепочки из элементарных квантовых преобразований (квантовых гейтов) [29]. Окончательным результатом вычислений является классическая информация, которая получается в результате измерения выходного состояния. На Рис. 1.1 представлена схема реализации простейшего квантового преобразования.

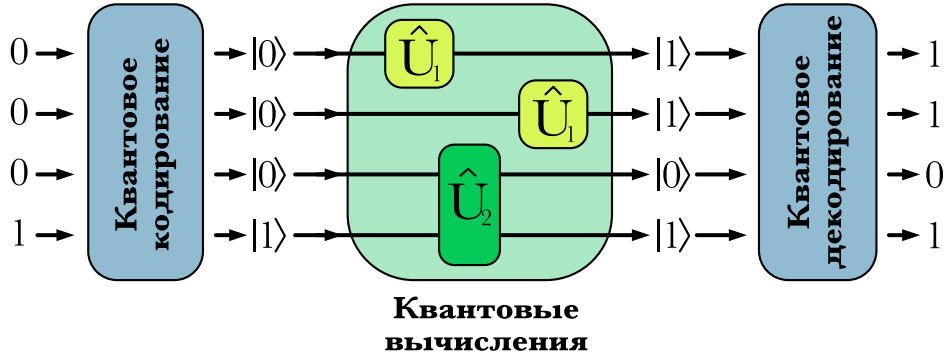


Рис. 1.1: Пример реализации квантовых вычислений над входными состояниями. На рисунке $\hat{U}_1$, $\hat{U}_2$ – элементарные квантовые гейты.

Описанная модель называется схематичной моделью вычислений [30, 31], потому что любому алгоритму можно сопоставить некоторую схему реализации (как на Рис. 1.1). Такая модель очень проста концептуально, поскольку схожа с привычной моделью классических вычислений. Однако, эту модель трудно реализовать на практике. Одна из основных проблем в ее реализации состоит в том, что кубиты в суперпозиционном состоянии сильно подвержены декогеренции. Чтобы решить эту проблему нужно изолировать кубиты от взаимодействия с окружением. С другой стороны, полностью отделить кубиты от внешнего воздействия невозможно, поскольку в этом случае нельзя будет ими управлять, что необходимо для квантовых вычислений. По этой причине все реализованные на практике протоколы имеют лишь небольшое число кубитов [32, 33]. К сожалению, этого недостаточно для превосходства квантового компьютера над классическим. Это привело к поиску альтернативных моделей вычислений [9, 34, 35], которые сложнее с точки зрения теоретического понимания, но проще реализуются на практике.

Одним из альтернативных подходов к реализации вычислений является подход адиабатических квантовых вычислений [7]. Данный подход работает на принципе адиабатического развития квантовой системы, находящейся в основном состоянии (адиабатическая теорема). Конечное состояние, полученное после такого развития, и будет искомым решением задачи. В работе [36] было продемонстрировано, что модель адиабатического квантового компьютера эквивалентна схемной модели квантовых вычислений. В настоящее время компания D-Wave занимается коммерческой реализацией данной модели компьютера. Стоит отметить,

что квантовые компьютеры данной фирмы не являются универсальными, а способны решать лишь узкий класс задач.

Также можно выделить модель топологических вычислений [8]. Для реализации вычислений в этой модели используются квазичастицы называемые "энионами". Такие частицы "живут" в двумерных квантовых системах. Это означает, что их статистика более общая, чем привычные статистики Дирака или Ферми. При перестановке двух таких энионов, их общая волновая функция приобретает фазовый множитель вида $\exp(i\varphi)$. Эта фаза зависит от типа энионов, которые участвуют в перестановке. Процесс вычислений в данной модели напоминает процесс вязания. На первом этапе подготавливаются энионы (нити) в начальном состоянии, после этого они начинают меняться друг с другом местами (переплетаться). В результате можно получать любое унитарное преобразование над входным состоянием. В работах [37–39] было доказано, что данная модель вычислений полностью эквивалентна стандартной схемной модели квантовых вычислений. Кроме того, эта модель устойчива к локальным ошибкам, образующимся за счет взаимодействия с окружением. Малые ошибки способны модифицировать имеющиеся в системе "косы" энионов, но не способны их раскручивать. То есть ошибки не изменяют результаты топологически. В настоящее время активно ведется поиск физических систем, на которых можно экспериментально реализовать данный тип вычислений [35, 40].

Еще один подход, которым мы и будем интересоваться, использует протокол квантовой телепортации для вычислений.

1.3 Применение телепортации в квантовых вычислениях

Прежде чем перейти к квантовым вычислениям, давайте рассмотрим подробнее протокол квантовой телепортации. Квантовая телепортация позволяет переносить состояние, находящееся в одном месте (у Алисы) на объект в другом месте (у Боба) [41–45]. При этом квантовое состояние считается неизвестным, так что просто приготовить его нельзя. Для реализации такой передачи необходимо иметь две дополнительные системы, находящиеся в перепутанном состоянии. По определению, квантовые системы A и B являются перепутанными, если их общая матрица плотности $\hat{\rho}$ не факторизуется на прямое произведение матриц плотности этих подсистем ($\hat{\rho}_A$ и $\hat{\rho}_B$), то есть не выполняется следующее равенство

$$\hat{\rho} = \sum_i \lambda_i \hat{\rho}_{i,A} \otimes \hat{\rho}_{i,B},$$

где λ_i – это вероятность нахождения системы в состоянии $\hat{\rho}_{i,A} \otimes \hat{\rho}_{i,B}$.

Квантовая перепутанность была впервые рассмотрена Эйнштейном, Подольским и Розеном [46] как парадокс, который указывал на неполноту квантовой механики. В шестидесятых годах прошлого века Джон Белл предложил способ проверки полноты квантовой механики. Для этого он ввел базис сильно коррелированных состояний двух систем и предложил

неравенство, которое сейчас называют неравенством Белла. Проверка этого неравенства показала [47, 48], что в квантовой механике нет скрытых переменных, а наличие перепутанных состояний – один из важных элементов аппарата.

Для квантовой телепортации состояния одного кубита ($|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$), нужны два дополнительных кубита, которые находятся в одном из четырех состояний Белла

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad (1.1)$$

$$|\beta_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \quad (1.2)$$

$$|\beta_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle), \quad (1.3)$$

$$|\beta_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle). \quad (1.4)$$

Для определенности будем считать, что вспомогательные кубиты находятся в состоянии $|\beta_{00}\rangle$. Алиса и Боб держат у себя по одному кубиту из перепутанной пары. Волновую функцию всех трех кубитов можно записать в виде тензорного произведения двух волновых функций двух подсистем

$$|\Phi\rangle = |\Psi\rangle_1 \otimes |\beta_{00}\rangle_{23} = (\alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1) \otimes |\beta_{00}\rangle_{23}. \quad (1.5)$$

Здесь нижний индекс указывает на номер кубита. В такой нотации предполагается, что первый и второй кубиты находятся у Алисы, а третий – у Боба. На следующем шаге протокола квантовой телепортации Алиса приводит имеющиеся у нее кубиты во взаимодействие с прибором, измеряющим базисные состояния Белла. Прибор показывает какое из белловских состояний измерено. Результат этих измерений Алиса отправляет Бобу по классическому каналу связи. Для того, чтобы понять какие возможные состояния будут у Боба в результате описанных действий, нужно переразложить выражение (1.5) так, чтобы первый и второй кубиты оказались в базисе состояний Белла

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle &= |\Psi\rangle_1 \otimes |\beta_{00}\rangle_{23} = \\ &= \frac{1}{2} \left[|\beta_{00}\rangle_{12} \otimes |\Psi\rangle_3 + |\beta_{10}\rangle_{12} \otimes (Z|\Psi\rangle_3) + |\beta_{01}\rangle_{12} \otimes (X|\Psi\rangle_3) + |\beta_{11}\rangle_{12} \otimes (XZ|\Psi\rangle_3) \right], \end{aligned} \quad (1.6)$$

где X и Z – это матрицы Паули, которые имеют следующий вид

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Учитывая информацию о результатах измерений Алисы и разложение (1.6), Боб может подобрать преобразование, которое завершает телепортацию неизвестного квантового состояния $|\Psi\rangle$. Например, если Алиса получила при измерении состояние Белла $|\beta_{01}\rangle$, то для телепортации Бобу необходимо произвести преобразование X над своим кубитом.

Хоть квантовая телепортация была первоначально предложена, как протокол для передачи квантового состояния, ее можно также использовать и для квантовых вычислений.

Существует два разных подхода к этим вычислениям. Первый подход состоит в том, чтобы в протоколе квантовой телепортации вместо состояния $|\beta_{00}\rangle_{23}$, которое распределяется между Алисой и Бобом, использовать состояние $I \otimes U|\beta\rangle_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \otimes \hat{U}|0\rangle + |1\rangle \otimes \hat{U}|1\rangle)$, где $\hat{U}$ – это унитарный однокубитовый оператор [49, 50]. Если провести все этапы квантовой телепортации с этим состоянием, то в результате у Боба будет преобразованное состояние $\hat{U}|\Psi\rangle$. Мы видим, что в результате описанной процедуры произошла телепортация преобразования $\hat{U}$ с состояния Белла $\hat{U}|\beta_{00}\rangle$ на состояние $|\Psi\rangle$. По этой причине такая схема называется "схемой телепортации квантового логического вентиля". В теории такая схема способна выполнять универсальные унитарные преобразования входных состояний. Однако, представленная схема сложна с практической точки зрения, потому что для реализации преобразований в ней необходимо не только уметь приготавливать состояния Белла, но также и совершать произвольные унитарные операции над ним. Поэтому такая схема не вызвала большой интерес ученых, чего нельзя сказать о другой схеме вычислений, использующей протокол квантовой телепортации.

В этой схеме в качестве основного ресурса для телепортации также используется многочастично-перепутанное состояние. Отличие рассматриваемой схемы вычислений от предыдущей состоит в том, что ресурсное состояние не нужно каждый раз дополнительно преобразовывать. Вычисления в данной схеме реализуются за счет локальных измерений многочастично-перепутанного состояния приборами, базисные состояния которых могут выбираться произвольным образом. Поскольку при измерении квантового состояния происходит проектирование этого состояния на базис прибора, то состояние после измерения будет зависеть от выбора этого самого базиса. То есть состояние, которое получит Боб в данном методе, будет иметь вид $\hat{U}|\Psi\rangle$, где преобразование $\hat{U}$ полностью задается выбором базисов измерительных приборов Алисы. Такие вычисления называют "квантовыми вычислениями, основанными на измерениях" (Measurement-Based Quantum Computation) [12]. Более подробно данная модель будет описана в разделе 1.4.

В данной работе будет исследоваться модель квантовых вычислений, основанных на измерении, которая впервые была предложена Раусендорфом и Бригелем [11]. Такая модель называется моделью однонаправленных квантовых вычислений. Давайте перейдем к подробному разбору данной модели.

1.4 Кластерные состояния

Как уже отмечалось основным ресурсом для вычислений является многочастично-перепутанное состояние. В первых работах, в качестве ресурсного состояния использовались состояния Гринбергера-Хорна-Цайлингера [51]. Однако, такое состояние сильно подвержено декогеренции и поэтому быстро разрушается. По этой причине начали использовать другое ресурсное состояние, называемое кластерным состоянием. Кластерное состояние принадлежит семейству сильно запутанных многочастичных квантовых состояний, которые могут

быть эффективно параметризованы математическим графом (подробнее о применении техники графов к квантовым состояниям можно прочитать в [52]). Граф $G = (V, E)$ – это математический объект, который состоит из n вершин (множество V) вместе с множеством ребер $E \subseteq V \times V$. Две вершины u и v графа $G = (V, E)$ являются смежными (соседними), если пара $(u, v) \in E$.

Для описания кластерного состояния с помощью графа необходимо каждой физической системе, составляющей это состояние, сопоставить узел графа. Перепутанности между системами нужно отождествить с ребрами графа. Из этой процедуры понятно, что графы кластерных состояний всегда ненаправленные, поскольку ребра указывают лишь на факт перепутанности между системами. В зависимости от типа используемых физических систем, различают кластерные состояния в дискретных и непрерывных переменных.

1.4.1 Кластерные состояния в дискретных переменных

Первые работы по квантовым однонаправленным вычислениям на кластерных состояниях были выполнены в дискретных переменных (кубитах) [9, 11]. Дискретные кластерные состояния, соответствующие определенному графу G , строятся следующим образом: каждой вершине графа сопоставляется кубит в состоянии $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$, после этого ко всем парам кубитов $(i, j) \in E$ применяется операция

$$\text{cPhase}_{i,j} = |0\rangle_i \langle 0| \otimes \hat{I}_j + |1\rangle_i \langle 1| \otimes \hat{Z}_j, \quad (1.8)$$

где $\hat{I}_j$ – единичный однокубитовый оператор, действующий на j -ый кубит; $\hat{Z}_j$ – оператор Паули, определяемый выражением (1.7). Волновая функция получившегося состояния имеет следующий вид

$$|\psi\rangle_G = \prod_{(i,j) \in E} \text{cPhase}_{i,j} |+\rangle_i^{\otimes n}, \quad (1.9)$$

Если число кубитов в кластерном состоянии большое, то запись волновой функции становится громоздкой, поэтому от определения волновой функции переходят к другому эквивалентному определению через стабилизаторы. По определению, оператор $\hat{S}$ является стабилизатором состояния $|\phi\rangle$, если это состояние является его собственным состоянием с собственным числом равным $+1$. Другими словами стабилизатор – это оператор, который оставляет определенное состояние инвариантным:

$$\hat{S}|\phi\rangle = |\phi\rangle. \quad (1.10)$$

Если теперь несколько операторов $\hat{S}_i$ и $\hat{S}_j$ являются стабилизаторами состояния $|\phi\rangle$, то $\hat{S}_i \hat{S}_j$ и $\hat{S}_j \hat{S}_i$ являются также стабилизаторами состояния $|\phi\rangle$. Тривиальным стабилизатором любого состояния является единичный оператор. Это значит, что и обратный оператор $\hat{S}_j^{-1}$, также является стабилизатором

$$\hat{S}_j^{-1}|\phi\rangle = \hat{S}_j^{-1}(\hat{S}_j|\phi\rangle) = \hat{I}|\phi\rangle = |\phi\rangle.$$

Из всего вышесказанного следует, что все операторы стабилизаторы состояния $|\phi\rangle$ образуют Абелеву группу по умножению. С другой стороны, если существует такая нетривиальная группа (группа состоящая более чем из одного элемента), то она задает единственное состояние.

Рассмотрим строение стабилизаторов кластерного состояния с графом $G = (V, E)$. Для этого нужно понять, как развиваются стабилизаторы $\hat{S}_i$ некоторого состояния $|\phi\rangle$ под действием унитарного оператора $\hat{U}$. Из простой цепочки равенств

$$\hat{U}|\phi\rangle = \hat{U}\hat{S}_i|\phi\rangle = \hat{U}\hat{S}_i\hat{U}^\dagger\hat{U}|\phi\rangle = \left(\hat{U}\hat{S}_i\hat{U}^\dagger\right)\hat{U}|\phi\rangle,$$

мы получаем, что $\hat{U}\hat{S}_i\hat{U}^\dagger$ стабилизатор состояния $\hat{U}|\phi\rangle$. Для генерации кластерных состояний используются кубиты, каждый из которых находится в состоянии $|+\rangle$. Хорошо известно, что стабилизатором такого состояния является оператор Паули $\hat{X}$. Таким образом, набор стабилизаторов, которые определяют волновую функцию n независимых кубитов в состояниях $|+\rangle$ ($|\phi\rangle = |+\rangle_1|+\rangle_2\cdots|+\rangle_n$), имеет вид $\{\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_n\}$. Далее, эволюционируя каждый стабилизатор $\hat{X}_i$ оператором $\prod_{(i,j)\in E} \text{cPhase}_{i,j}$, мы получим набор стабилизаторов кластерного состояния

$$\hat{S}_i = \hat{X}_i \prod_{j\in N(i)} \hat{Z}_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.11)$$

где $N(i) = \{j | (i, j) \in E\}$ обозначает множество всех ближайших соседних вершин к i (вершин соединенных напрямую с i). Операторы $\hat{X}_j$ и $\hat{Z}_j$ являются операторами Паули, действующими на кубит с номером j . Например, для кластерного состояния изображенного на Рис. 3.3, стабилизаторы записываются в виде:

$$\hat{S}_1 = \hat{X}_1\hat{Z}_2, \quad \hat{S}_2 = \hat{X}_2\hat{Z}_1\hat{Z}_3, \quad \hat{S}_3 = \hat{X}_3\hat{Z}_1.$$

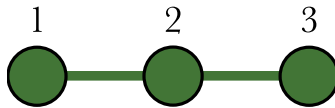


Рис. 1.2: Кластерное состояние, описываемое линейным графом $G = (V, E)$. Для данного графа $V = \{1, 2, 3\}$ – множество вершин, а $E = \{(1, 2); (2, 1); (2, 3); (3, 2)\}$ – множество связей в графе.

После того, как мы определили основной ресурс для однонаправленных вычислений, можно перейти непосредственно к самим вычислениям. После приготовления кластерного состояния с определенным графом G , к его некоторым узлам примешиваются кубиты во входных состояниях, над которыми и хочется проводить вычисления. Примешивание происходит за счет измерения в базисе Белла узлов кластерного состояния и входных кубитов. При этом происходит телепортация входных состояний кубита на узлы кластерных состояний. После

того, как мы ввели входные состояния в кластер, можно перейти к локальным измерениям узлов кластера в базисе собственных состояний оператора $\cos \theta \hat{X} + \sin \theta \hat{Y}$. Незмеренные узлы, число которых должно быть равно числу входных кубит, будут составлять выходное состояние. Также как и в классическом протоколе телепортации, чтобы выходное состояние превратилось в необходимый нам результат вычислений, его необходимо подкорректировать с помощью применения к нему операторов Паули $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$. Последовательность операторов, которые нужно применить для получения нужного состояния, зависит от всех результатов измерения. После процедуры постобработки выходных состояний, мы имеем результирующее состояние кубитов, которое связано с входными состояниями с помощью преобразования $\hat{U}(\theta_1, \theta_2, \dots)$. Данное преобразование зависит от углов измерительных приборов, используемых при локальных измерениях кластерного состояния. Подбирая эти углы можно реализовывать различные унитарные преобразования.

Для практического использования модели однонаправленных вычислений необходимо доказать ее универсальность. То есть способность реализовывать с помощью данной модели любые унитарные преобразования с произвольной точностью. Как было продемонстрировано в работах [30, 53, 54], любое преобразование можно представить как разложение на произведение операторов из конечного набора. Обычно используется универсальный набор логических вентелей состоящий из универсального однокубитового унитарного преобразования (поворот однокубитового состояния на сфере Блоха) и двухкубитовой контролируемой операции CNOT. Было продемонстрировано [9], что для реализации всех однокубитовых унитарных преобразований достаточно использовать одномерные линейные кластерные состояния с четырьмя узлами. Для выполнения операции CNOT нужно уже иметь двумерное кластерное состояние, что было продемонстрировано в работе [9]. На Рис. 1.3 представлены два кластерных состояния с минимальным числом узлов, необходимым для реализации универсального однокубитового преобразования и двухкубитового преобразования CNOT.

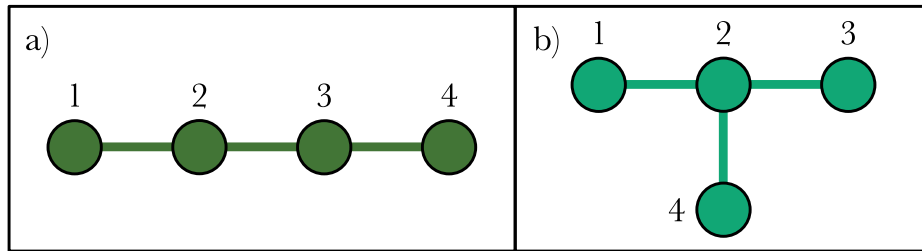


Рис. 1.3: а) кластерное состояние необходимое для реализации универсального однокубитового преобразования; б) кластерное состояние необходимое для реализации двухкубитового преобразования CNOT.

Таким образом, для универсальных квантовых вычислений над n кубитами можно использовать двумерное кластерное состояние, с большим графом в виде прямоугольной сетки. На такой сетке, с помощью измерений можно "рисовать" произвольные однокубитовые и двухкубитовые гейты. Так, например, на Рис. 1.4 представлены две эквивалентные схемы

реализации одного и того же преобразования. Слева представлена обычная схемная модель вычислений, а справа – вычисление с помощью кластерного состояния.

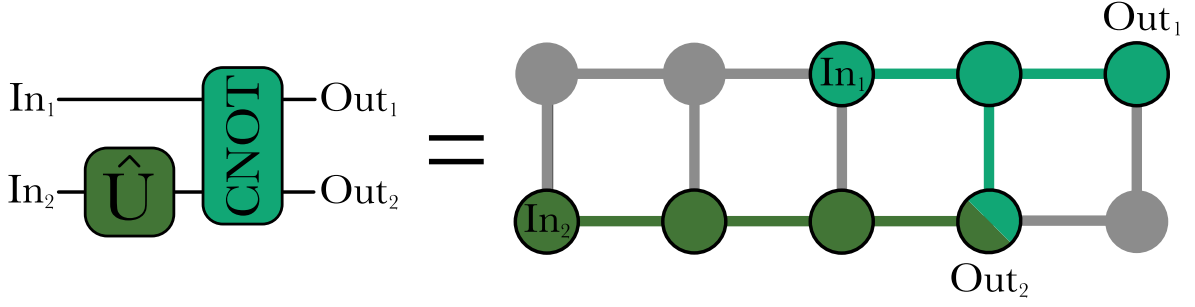


Рис. 1.4: Две схемы реализации одинаковых квантовых преобразований. Слева изображена реализации преобразования в схемной модели вычислений, а справа – в однонаправленной модели. На рисунке In_i и Out_i входные и выходные состояния, соответственно. Серым цветом обозначены узлы и связи, которые не участвуют в преобразованиях и должны измеряться в базисе $\hat{Z}$ [11].

Основной проблемой однонаправленных вычислений является то, что большие кластерные состояния (с большим числом кубитов) трудно создавать, поскольку перепутывание кубитов друг с другом с помощью оператора $s\text{Phase}$ носит вероятностный характер [11]. На сегодняшний день многие ученые мира пытаются создать дискретные кластерные состояния с большим числом узлов. Существует множество работ, различающихся способом практической реализации кластеров. Например, спиновые кластерные состояния [55–57], атомные кластерные состояния [58], кластерные состояния на захваченных ионах [59] и фотонные кластерные состояния [60–63].

1.4.2 Кластерные состояния в непрерывных переменных

Перейдем теперь к модели кластерных состояний в непрерывных переменных [13]. Как понятно из названия, для генерации таких кластерных состояний используются физические системы в непрерывных переменных. Многие физические системы описываются таким типом переменных, например, к непрерывным переменным, можно отнести квадратуры электромагнитного поля; коллективный спин ансамбля атомов; положение и импульс зеркал(мембран) оптомеханических систем и многие другие. Кроме того, такие системы представляют исключительный интерес ввиду того, что они обладают наибольшей информационной емкостью [64] и сравнительно легко реализуемы экспериментально.

Все физические системы в непрерывных переменных описываются двумя наблюдаемыми операторами $\hat{x}$ и $\hat{y}$. Эти операторы подчиняются каноническому коммутационному соотношению

$$[\hat{x}, \hat{y}] = \frac{i}{2}. \quad (1.12)$$

Операторы $\hat{x}$ и $\hat{y}$ действуют в бесконечномерном гильбертовом пространстве и имеют в нем непрерывный спектр. Собственные функции данных операторов будем обозначать, как $|q\rangle_x$ и $|p\rangle_y$. Справедливы следующие соотношения

$$\hat{x}|q\rangle_x = q|q\rangle_x, \quad \hat{y}|p\rangle_y = p|p\rangle_y, \quad q, p \in \mathbb{R}. \quad (1.13)$$

Собственные функции данных операторов ортогональны ${}_x\langle q|q'\rangle_x = \delta(q-q')$, ${}_y\langle p|p'\rangle_y = \delta(p-p')$ и полны $\int dq |q\rangle_x {}_x\langle q| = \int dp |p\rangle_y {}_y\langle p| = \hat{I}$. Кроме того, собственные функции операторов $\hat{x}$ и $\hat{y}$ связаны между собой с помощью преобразования Фурье:

$$|q\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-iqp} |p\rangle_y, \quad (1.14)$$

$$|p\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dq e^{iqp} |q\rangle_x. \quad (1.15)$$

Давайте теперь выведем понятие кластерного состояния в непрерывных переменных из определения кластера на кубитах. Для этого нам нужно использовать аналоги операторов Паули для систем в непрерывных переменных [65]. Такими аналогами являются операторы Гейзенберга-Вейла, которые имеют следующий вид

$$\hat{X}(s) \equiv e^{-2is\hat{y}}, \quad \hat{Z}(m) \equiv e^{2im\hat{x}}, \quad s, m \in \mathbb{R}. \quad (1.16)$$

Эти операторы не коммутативны

$$\hat{X}(s)\hat{Z}(m) = e^{-2ism}\hat{Z}(m)\hat{X}(s). \quad (1.17)$$

На базисные состояния операторов $\hat{x}$ и $\hat{y}$ непрерывные операторы Паули действуют следующим образом:

$$\hat{X}(s)|q\rangle_x = |q+s\rangle_x, \quad \hat{Z}(m)|q\rangle_x = e^{2imq}|q\rangle_x, \quad (1.18)$$

$$\hat{Z}(m)|p\rangle_y = |p+s\rangle_y, \quad \hat{X}(s)|p\rangle_y = e^{-2isp}|p\rangle_y. \quad (1.19)$$

В случае дискретных переменных в качестве ресурса для генерации кластерных состояний использовались состояния $|+\rangle$, стабилизаторами которых являются операторы Паули $\hat{X}$. В непрерывном случае аналог оператора Паули $\hat{X}(s)$ является стабилизатором состояния $|0\rangle_y$, которое и нужно использовать для генерации кластерных состояний. Состояние $|0\rangle_y$ является бесконечно сжатым по $\hat{y}$ квадратуре, поскольку среднеквадратичные флуктуации ${}_y\langle 0|\delta\hat{y}^2|0\rangle_y = 0$, а ${}_y\langle 0|\delta\hat{x}^2|0\rangle_y = +\infty$. Такое состояние невозможно реализовать на практике так как оно требует бесконечной энергии, поэтому в реальных условиях используют состояния с конечным сжатием. Это вносит ограничение на кластерные состояния и на вычисления, реализуемых с их помощью. Эти ограничения будут рассмотрены нами во второй главе.

На следующем этапе генерации кластерных состояний нужно перепутать начальные состояния определенным образом (в соответствии с используемым n -узловым графом $G =$

(V, E)) с помощью операторов аналогичных $\text{sPhase}_{i,j}$. Непрерывным аналогом данного оператора является оператор

$$\hat{C}_{Zij} = e^{2ig_{ij}\hat{x}_i\hat{x}_j}, \quad g_{ij} \in \mathbb{R}. \quad (1.20)$$

В результате применения этих операторов к состояниям $|0\rangle_y$ мы получаем кластерное состояние $|G\rangle$, которое характеризуется графом $G = (V, E)$. В отличие от дискретного случая, где кластерное состояние всегда имело невзвешенный граф (граф у которого связи между ребрами задаются единицами, указывая лишь на факт наличия связи), в непрерывном случае ребра графов уже могут иметь веса $g_{ij} \in \mathbb{R}$. Эти веса являются дополнительной степенью свободы, которую можно использовать при квантовых вычислениях.

Волновая функция кластерного состояния, полученная в результате действия операторов $\hat{C}_{Zij}$ на сжатые состояния $|0\rangle_{y,i}$ при $i, j = 1, \dots, n$, имеет следующий вид:

$$|G\rangle = \hat{C}_{Ztotal}|0\rangle_y^{\otimes n} \equiv \left(\prod_{(i,j) \in E} \hat{C}_{Zij} \right) |0\rangle_{y,1} |0\rangle_{y,2} \cdots |0\rangle_{y,n} = \left(\prod_{(i,j) \in E} e^{2ig_{ij}\hat{x}_i\hat{x}_j} \right) |0\rangle_{y,1} |0\rangle_{y,2} \cdots |0\rangle_{y,n}. \quad (1.21)$$

Аналогично дискретному случаю, удобно перейти от данного определения к определению через набор стабилизаторов. Как и раньше, чтобы получить этот набор нужно взять набор стабилизаторов $\{\hat{X}_i(s)\}_{i=1}^n = \{e^{-2is\hat{p}_i}\}_{i=1}^n$ не перепутанных сжатых состояний $|0\rangle_{y,i}$ и эволюционировать каждый оператор из набора с помощью оператора $\hat{C}_{Ztotal}$. В результате этого мы получим вид стабилизатора кластерного состояния

$$\hat{C}_{Ztotal}\hat{X}_i(s)\hat{C}_{Ztotal}^\dagger = \exp \left[-2is(\hat{y}_i - \sum_{j \in N(i)} g_{ij}\hat{x}_j) \right] = \hat{X}_i(s) \prod_{j \in N(i)} \hat{Z}_j(g_{ij}s), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.22)$$

где $N(i)$ – множество всех соседних узлов с узлом с номером i . Мы видим, что стабилизаторы кластерного состояния в дискретных переменных по виду совпадают со стабилизаторами в непрерывных переменных. Более того, из определения стабилизатора (1.22) следует, что, в случае непрерывных переменных, кластерное состояние может быть полностью определено также с помощью другого набора операторов как

$$\hat{N}_i|G\rangle = \left(\hat{y}_i - \sum_{j \in N(i)} g_{ij}\hat{x}_j \right) |G\rangle = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.23)$$

Оператор, стоящий в левой части уравнения (1.23), называется нулифайером кластерного состояния ("калька" с английского термина *nullifier*).

Здесь важно отметить, что знак равенства в определении (1.23) соответствует случаю бесконечного сжатия начальных состояний $|0\rangle_{y,i}$, которое недостижимо в реальных экспериментах. Как уже упоминалось ранее для решения данной проблемы нужно использовать состояния с конечным сжатием. Однако, в этом случае встает вопрос насколько сильно

нужно сжимать квантовые состояния, чтобы они были пригодны для генерации кластера. Чтобы ответить на этот вопрос нужно воспользоваться критерием сепарабельности ван Лука-Фурусавы [66], который является обобщением критерия Дуана [67]. Данный критерий позволит отделить те системы, которые непригодны для генерации. Пусть у нас имеется n частичная система в непрерывных переменных, которая характеризуется набором квадратур $\{\hat{x}_k, \hat{y}_k\}_{k=1}^n$. Предположим также, что данная система разделима на M независимых подсистем S_r , при $r = 1, \dots, M$. В этом случае должно выполняться неравенство вида:

$$\langle \delta \hat{u}^2 \rangle + \langle \delta \hat{v}^2 \rangle \geq \frac{1}{2} \sum_{r=1}^M \left| \sum_{k \in S_r} (h_k \tilde{g}_k - \tilde{g}_k h_k) \right|, \quad (1.24)$$

где наблюдаемые записываются с помощью канонических переменных $\hat{x}_k, \hat{y}_k$ в следующем виде:

$$\hat{u} = \sum_{r=1}^M \left(\sum_{k \in S_r} [h_k \hat{x}_k + g_k \hat{y}_k] \right), \quad \hat{v} = \sum_{r=1}^M \left(\sum_{k \in S_r} [\tilde{h}_k \hat{x}_k + \tilde{g}_k \hat{y}_k] \right), \quad h_k, g_k, \tilde{h}_k, \tilde{g}_k \in \mathbb{R}, \quad (1.25)$$

а коэффициенты $h_k, g_k, \tilde{h}_k, \tilde{g}_k$ подобраны так, чтобы u и v были одновременно измеримы ($[\hat{u}, \hat{v}] = 0$). Если неравенство (1.24) нарушается, то состояние получится не разделимым на M подсистем или, другими словами, перепутанным. Если теперь в качестве операторов $\hat{u}$ и $\hat{v}$ рассматривать нулифайеры кластерного состояния (1.23), то можно говорить о существовании перепутанности между узлами кластера. Кроме того мы получим границу, основываясь на которой можно сделать вывод о допустимом сжатии используемых физических систем. Подробнее это будет рассмотрено во второй главе диссертации. Кроме того, данный критерий справедлив не только для чистых состояний, но и для смешанных [66]. По этой причине в качестве ресурса для генерации кластерного состояния можно использовать смешанное состояния сжатого света, полученное от субпуассоновского лазера с захватом фазы [68].

Универсальные квантовые вычисления в непрерывных переменных

После того, как мы определили кластерное состояние в непрерывных переменных, можно перейти к вычислению на этих состояниях. Однако, сначала нам нужно понять как вообще устроены вычисления в непрерывном случае. Идея использования физических систем в непрерывных переменных для квантовых вычислений была первоначально предложена Ллойдом и Бронштейном [69]. В своей работе они доказали, что существует конечный набор преобразований, который может аппроксимировать с произвольной точностью любую унитарную эволюцию квантовой системы в непрерывных переменных. Основной идеей их доказательства было то, что всякое последовательное развитие квантовой системы набором гамильтонианов $\{\pm \hat{H}_i\}$, эквивалентно развитию гамильтонианами вида: $[\hat{H}_i, \hat{H}_j]$, $[\hat{H}_k, [\hat{H}_i, \hat{H}_j]]$ и т. д. Это следует из формулы Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа и следующего соотношения

$$e^{it\hat{H}_j} e^{it\hat{H}_k} e^{-it\hat{H}_j} e^{-it\hat{H}_k} = e^{-t^2[\hat{H}_j, \hat{H}_k]} + O(t^3). \quad (1.26)$$

Для поиска набора гамильтонианов, порождающих любую унитарную эволюцию, рассмотрим эволюцию канонических операторов $\hat{x}$ и $\hat{y}$ различными гамильтонианами. Хорошо известно, что в гейзенберговой картине временное развитие произвольного оператора $\hat{w}$ гамильтонианом $\hat{H}$ задается с помощью оператора эволюции вида:

$$\hat{w}(t) = e^{i\hat{H}t}\hat{w}(0)e^{-i\hat{H}t}. \quad (1.27)$$

Действие простейшего гамильтониана вида $\hat{H} = \hat{x}$ на квадратуры $\hat{x}$ и $\hat{y}$ приводит их к виду $\hat{x}(t) = \hat{x}(0)$ и $\hat{p}(t) = \hat{p}(0) - t$, а гамильтониан вида $\hat{H} = \hat{y}$ развивает канонические операторы как $\hat{x}(t) = \hat{x}(0) + t$ и $\hat{p}(t) = \hat{p}(0)$. Из набора таких операторов $\{\pm\hat{x}, \pm\hat{y}\}$ можно построить гамильтониан вида $a\hat{x} + b\hat{y} + c$. Такой гамильтониан, как мы выяснили, может привести лишь к линейным трансформациям системы. Для универсальных квантовых вычислений этого недостаточно, поэтому рассмотрим действие гамильтониана фазовращателя (phase shifter) вида

$$\hat{H}_{PS} = \frac{1}{2} (\hat{x}^2 + \hat{y}^2). \quad (1.28)$$

Применение этого гамильтониана в течение времени t приводит к повороту квадратур. Операторы этих повернутых квадратур имеют вид:

$$\hat{x}(t) = \cos(t)\hat{x}(0) - \sin(t)\hat{y}(0), \quad (1.29)$$

$$\hat{y}(t) = \sin(t)\hat{x}(0) + \cos(t)\hat{y}(0). \quad (1.30)$$

С помощью коммутационных соотношения между гамильтонианами из набора $\{\hat{H}_{PS}, \hat{x}, \hat{y}\}$ мы можем построить уже гамильтониан в виде $a\hat{H}_{PS} + b\hat{x} + c\hat{y} + d$.

Давайте теперь рассмотрим другой квадратичный гамильтониан, который имеет вид:

$$\hat{H}_S = \frac{1}{2} (\hat{x}\hat{y} + \hat{y}\hat{x}). \quad (1.31)$$

Такой гамильтониан растягивает $\hat{x}$ -квратуру и сжимает $\hat{y}$ квадратуру. В результате действия этого гамильтониана получатся следующие операторы:

$$\hat{x}(t) = e^t\hat{x}(0), \quad (1.32)$$

$$\hat{y}(t) = e^{-t}\hat{y}(0). \quad (1.33)$$

Из коммутационного соотношения $[\hat{H}_{PS}, \hat{H}_S] = i(\hat{x}^2 - \hat{y}^2)$ следует, что алгебра, генерируемая операторами $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{H}_{PS}, \hat{H}_S\}$ с помощью коммутаторов, позволяет строить любой гамильтониан не выше второй степени по $\hat{x}$ и $\hat{y}$. Преобразования с гамильтонианами не выше второй степени называются гауссовыми, поскольку они не выводят гауссовы состояния из своего класса. Это также означает, что эволюция квадратур данными гамильтонианами будет линейной и всегда может быть записана в матричном виде с помощью симплектических матриц.

Для конструирования более высоких степеней необходимы уже кубические гамильтонианы $\hat{H}_1 = \hat{x}^3$ и $\hat{H}_2 = \hat{y}^3$, которые появляются в нелинейных физических процессах. С помощью $\hat{H}_1$ и $\hat{H}_2$ уже можно построить гамильтониан любой степени по $\hat{x}$ и $\hat{y}$. Это можно увидеть из коммутаторов вида

$$[\hat{y}^3, \hat{y}^m \hat{x}^n] = i\hat{y}^{m+2} \hat{x}^{n-1} + \text{члены меньшей размерности}, \quad (1.34)$$

$$[\hat{x}^3, \hat{y}^m \hat{x}^n] = i\hat{y}^{m-1} \hat{x}^{n+2} + \text{члены меньшей размерности}. \quad (1.35)$$

То есть из одночленов степени $m + n$ можно с помощью гамильтонианов $\hat{H}_1$ и $\hat{H}_2$ построить одночлен степени $m + n + 1$. Так как любой многочлен степени $m + n + 1$ можно построить из одночленов степени $m + n + 1$ и ниже, то это значит, что применяя линейные операции $\{\hat{H}_S, \hat{H}_{PS}, \hat{x}, \hat{y}\}$ и одну нелинейную операцию конечное число раз можно построить многочлены произвольного порядка по $\hat{x}$ и $\hat{y}$ с любой желаемой точностью. Другими словами, применение любых линейных операций вместе с одной нелинейной приводит к произвольной эволюции одного квантового осциллятора.

Предположим теперь, что у нас имеется многомодовая система, характеризуемая набором осцилляторов с квадратурами $\{\hat{x}_i, \hat{y}_i\}_{i=1}$. Предположим также, что над каждой переменной мы можем выполнять набор преобразований, описанных выше. Применим к нашей многомодовой системе гамильтониан вида

$$\hat{H}_{CZ,ij} = 2\hat{x}_j \hat{x}_i. \quad (1.36)$$

Эволюция переменных $\hat{x}_i, \hat{y}_i$ и $\hat{x}_j, \hat{y}_j$ таким гамильтонианом задается следующими выражениями:

$$\hat{x}_i(t) = \hat{x}_i(0), \quad \hat{y}_i(t) = \hat{y}_i(0) + t\hat{x}_j(0), \quad (1.37)$$

$$\hat{x}_j(t) = \hat{x}_j(0), \quad \hat{y}_j(t) = \hat{y}_j(0) + t\hat{x}_i(0). \quad (1.38)$$

Из полученных выражений видно, что на $\hat{y}$ -квадратуру одного осциллятора влияет $\hat{x}$ -квадратура другого. Это означает, что данное преобразование выполняет перепутывание двух квантовых осцилляторов по $\hat{x}$ и $\hat{y}$ квадратурам ($\hat{y}$ -квадратуры двух осцилляторов являются управляемыми, а $\hat{x}$ -квадратуры – управляющими). Такое преобразование относится также к классу гауссовых. Более сложные гамильтонианы взаимодействия можно получить комбинируя данный гамильтониан вместе с рассмотренными ранее одномодовыми гамильтонианами. Таким образом для выполнения универсальных преобразований нужно уметь реализовывать три типа операций: произвольные одомодовые гауссовы операции, двухмодовую гауссову операцию взаимодействия (например, операцию CZ) и одну нелинейную операцию.

Однонаправленные вычисления на кластерных состояниях в непрерывных переменных

После того, как мы определили какие преобразования нужно уметь выполнять для реализации универсальных квантовых вычислений, мы можем перейти непосредственно к кван-

товым однонаправленным вычислениям в непрерывных переменных. Процесс вычислений в данном случае схож с вычислениями в дискретных переменных. Как и раньше, на первом этапе вычислений готовится кластерное состояние с требуемым графом G . После этого нужно подготовить дополнительные квантовые системы во входном состоянии, над которыми и хочется проводить квантовые вычисления. Входные состояния в непрерывных переменных можно кодировать различным образом [70]. Наиболее распространенным является кодирование с помощью собственных состояний операторов квадратур (1.13). Оба этих набора базисных состояний ортонормированны. Кроме того эти состояния полны, поэтому любое квантовое состояние может быть выражено в виде суперпозиции этих базисных состояний.

На следующем этапе однонаправленных вычислений входные состояния нужно применить к некоторым узлам кластерного состояния. Для этих целей можно использовать взаимодействие типа QND [71, 72], которое будет запутывать входные и кластерные моды. Другой способ – это смешивание с помощью преобразований светоделителей. В работе мы будем использовать именно этот тип смешивания, поскольку такое преобразование просто и довольно безошибочно можно выполнять в линейно-оптических схемах.

Выполнив все подготовительные этапы можно перейти к локальным измерениям имеющегося состояния. Такие измерения выполняются с помощью гомодинных детекторов [73], временные профили локальных осцилляторов которых совпадают с профилями измеряемых состояний [74]. В общем случае гомодинный детектор может измерять обобщенные квадратуры в виде $\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}$, где угол θ можно выбирать произвольным образом при детектировании. Этот угол задает измерительный базис гомодинного детектора. При однонаправленных вычислениях некоторое число узлов кластера, совпадающее с числом входных состояний, должно остаться неизмеренным. Далее, к каждому из этих узлов необходимо применить операторы $\hat{X}(s)$ и $\hat{Z}(s')$ (аналог оператора Паули (1.16)). Параметры s и s' у этих операторов зависят от результатов гомодинных измерений, проведенных на предыдущем шаге процесса вычислений. После применения всех этих операторов неизмеренные узлы кластера, будут находиться в результирующем состоянии, связанном с входным с помощью оператора $\hat{U}$. Этот оператор будет зависеть от базисов гомодинных детекторов (от углов θ). Кроме того, он должен каким-то образом зависеть от графа G используемого кластерного состояния. Эту зависимость мы будем выявлять в третьей главе данной диссертации.

Как было продемонстрировано в работе [75], с помощью однонаправленных вычислений на кластерных состояниях в непрерывных переменных можно выполнять универсальные многомодовые гауссовы операции. Для выполнения негауссовой операции нужно использовать уже детекторы числа частиц вместо гомодинных [70, 76].

На сегодняшний день продемонстрировано множество способов реализации кластерных состояний в непрерывных переменных. Например, кластерные состояния на оптомеханических системах [77], кластерные состояния на атомных ансамблях [78], кластерные состояния на гибридных переменных [79], кластерные состояния на смешанных (атомно-полевых) си-

стемах [80,81] и световые кластерные состояния. Последние представляют большой интерес ввиду того, что их проще всего реализовывать и ими просто управлять. Можно выделить несколько различных схем получения световых кластерных состояний. Первая основывается на смещении оптического частотного комба на пластинке $\lambda/4$ и превращении его в кластерное состояние [82–86]. Такое состояние было экспериментально реализовано в работах [87,88]. Основной минус этого состояния заключается в том, что оно является одномерным, чего оказывается недостаточно для универсальных вычислений. Позже была предложена новая схема по превращению данного состояния в двумерное [89]. Другая схема кластерных состояний основывается на использовании временных световых мод и действия QND операции, которая превращает независимые временные импульсы в кластерное состояние [90–92]. Можно выделить подход, основывающийся на генерации кластерных состояний с помощью линейной оптики [76, 93, 94]. Это было продемонстрировано в работах [95–97]. Также для генерации кластерных состояний можно использовать излучение от параметрического осциллятора, синхронно накачиваемого фемтосекундным лазером (SPOPO) [98–100]. Квантовое излучение в такой системе формируется за счет периодической накачки нелинейного кристалла, находящегося в кольцевом резонаторе. При этом период импульсов накачки совпадает со временем обхода резонатора. В такой схеме фотон накачки, участвующий в генерации, совершает несколько обходов резонатора, каждый раз рождая скоррелированную пару фотонов на нелинейном кристалле. В результате этого процесса формируется сильно коррелированная гребенка световых импульсов. Для генерации кластерных состояний с помощью такого источника нужно из большого числа корреляций выбрать те, которые соответствуют корреляциям в кластерном состоянии определенной конфигурации. Для детектирования узлов таких кластеров используются гомодинные детекторы. При этом выбор профилей локальных осцилляторов таких детекторов будет задавать узел, детектируемый в данный момент.

1.5 Квантовые коды коррекции ошибок

Одна из основных проблем квантовых вычислений – это наличие ошибок искажающих результаты. Такие ошибки могут быть связаны с декогеренцией кубитов, неидеальностью используемых физических систем или другими квантовыми шумами. Для выявления и коррекции этих ошибок используются квантовые коды коррекции ошибок.

1.5.1 Квантовые коды коррекции ошибок для дискретных переменных

Ошибки квантовых вычислений

Прежде чем перейти непосредственно к кодам коррекции ошибок мы должны разобраться какие ошибки вообще существуют. Для этого рассмотрим кубит, который контактирует с

окружением. Это происходит всегда, поскольку кубит невозможно полностью изолировать от внешнего воздействия. Без потери общности можно предполагать [101], что начальным состоянием окружения является чистое состояние $|0\rangle_E$. При этом эволюция кубита и его окружения может быть описана унитарным преобразованием вида

$$|0\rangle \otimes |0\rangle_E \rightarrow |0\rangle \otimes |e_{00}\rangle_E + |1\rangle \otimes |e_{01}\rangle_E, \quad (1.39)$$

$$|1\rangle \otimes |0\rangle_E \rightarrow |0\rangle \otimes |e_{10}\rangle_E + |1\rangle \otimes |e_{11}\rangle_E, \quad (1.40)$$

где $|e_{ij}\rangle$ – это четыре состояния окружения, которые не обязательно нормированы и ортогональны. Если теперь подействовать таким унитарным преобразованием на кубит в суперпозиционном состоянии $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$, то мы получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes |0\rangle_E &\rightarrow a(|0\rangle \otimes |e_{00}\rangle_E + |1\rangle \otimes |e_{01}\rangle_E) + b(|0\rangle \otimes |e_{10}\rangle_E + |1\rangle \otimes |e_{11}\rangle_E) = \\ &= (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes \frac{1}{2}(|e_{00}\rangle_E + |e_{11}\rangle_E) + \\ &+ (a|1\rangle + b|0\rangle) \otimes \frac{1}{2}(|e_{01}\rangle_E + |e_{10}\rangle_E) + \\ &+ (a|1\rangle - b|0\rangle) \otimes \frac{1}{2}(|e_{01}\rangle_E - |e_{10}\rangle_E) + \\ &+ (a|0\rangle - b|1\rangle) \otimes \frac{1}{2}(|e_{00}\rangle_E - |e_{11}\rangle_E) = \\ &= I|\psi\rangle \otimes |e_I\rangle_E + X|\psi\rangle \otimes |e_X\rangle_E + Y|\psi\rangle \otimes |e_Y\rangle_E + Z|\psi\rangle \otimes |e_Z\rangle_E, \end{aligned} \quad (1.41)$$

где I – это единичный оператор, а $\{X, Y, Z\}$ – это операторы Паули. Из эволюции такой системы видно, что с кубитом происходит одно из четырех событий: ничего (I), инвертирование ($X : \{|0\rangle, |1\rangle\} \rightarrow \{|1\rangle, |0\rangle\}$), фазовая ошибка ($Z : \{|0\rangle, |1\rangle\} \rightarrow \{|0\rangle, -|1\rangle\}$) или обе ошибки одновременно ($Y : \{|0\rangle, |1\rangle\} \rightarrow \{|1\rangle, -|0\rangle\}$).

Аналогично, эволюция n -кубитного состояния может быть разложена по операторам $\{I, X, Z, Y\}^{\otimes n}$, где каждый такой оператор – это тензорное произведение однокубитовых операторов X, Y, Z и I . Таким образом, любую унитарную эволюцию n -кубитов и их окружения можно записать в виде

$$|\psi\rangle \otimes |0\rangle_E \rightarrow \sum_a E_a |\psi\rangle \otimes |e_a\rangle_E, \quad (1.42)$$

где индекс a пробегает все 2^{2n} значений, $\{E_a\}$ – это множество всех операторов Паули, действующих на n -кубитов, а $|e_a\rangle$ – это состояния окружения. Каждому оператору из группы $\{I, X, Z, Y\}^{\otimes n}$ можно сопоставить вес, целое число $0 \leq t \leq n$. Этот вес указывает число кубитов, на которые действуют нетривиальные (не единичные) операторы Паули. При этом ошибка E_a с весом t интерпретируется, как ошибка в t кубитах.

При создании квантовых кодов коррекции ошибок первым этапом является определение ошибок которые должны быть исправимы. Для этого выбирается подгруппа всех n -кубитовых операторов Паули

$$\mathcal{E} \subseteq \{I, X, Z, Y\}^{\otimes n}. \quad (1.43)$$

Важно отметить, что квантовые коды коррекции ошибок способны корректировать лишь унитарные ошибки. Обычно, в качестве элементов группы $\mathcal{E}$, выбираются операторы с весами не выше определенного числа t . При этом предполагается, что вероятность возникновения ошибок с весом большим t пренебрежимо мала.

1.5.2 Квантовые коды коррекции ошибок

Теория квантовых кодов коррекции ошибок занимается построением кодов, которые устойчивы к ошибкам определенного рода (ошибки из подгруппы $\mathcal{E}$). Во всех таких кодах k кубитов, которые хочется защитить, кодируются n кубитами ($n > k$). В результате один логический кубит задается несколькими физическими кубитами. При таком кодировании информация существует в избыточном виде и ее труднее разрушить.

Для построения теории квантовых кодов коррекции ошибок выделим основные свойства элементов n -кубитовой группы Паули $P_n = \pm\{I, X, Z, Y\}^{\otimes n}$.

1. Каждый элемент группы $M \in P_n$ является унитарным,
2. Для любого элемента $M \in P_n$, $M^2 = \pm I^{\otimes n}$,
3. Любые два элемента $M, N \in P_n$ либо коммутируют $[M, N] = 0$, либо антикоммутируют $\{M, N\} = 0$.

Рассмотрим теперь абелеву подгруппу S группы P_n . Все элементы подгруппы S коммутируют, а значит образуют общее собственное пространство $\mathcal{H}_S \subset \mathcal{H}_{2^n}$. При этом для любого $M \in S$ и любого $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_S$ выполняется $M|\psi\rangle = |\psi\rangle$. Другими словами операторы группы S являются стабилизаторами для векторов из пространства $\mathcal{H}_S$. Группа S называется стабилизатором кода. Если группа S имеет $n - k$ генераторов, то пространство $\mathcal{H}_S$ имеет размерность 2^k – существует k закодированных кубитов [102]. Пространство $\mathcal{H}_S$ называется кодовым пространством, а базисные состояния этого пространства называются кодовыми словами.

Построенный код способен исправлять ошибки, операторы которых $E_a \in \mathcal{E}$ антикоммутируют с генераторами группы S . Действительно, пусть $E_a \in \mathcal{E}$ и $M \in S$ антикоммутируют, тогда

$$ME_a|\psi\rangle = -E_aM|\psi\rangle = -E_a|\psi\rangle, \quad (1.44)$$

где $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_S$. Мы видим, что $E_a|\psi\rangle$ является собственным вектором оператора M , но уже с собственным числом равным -1 . Это означает, что при измерении оператора M мы сможем сделать вывод о наличии или отсутствии ошибки E_a .

Важно также отметить, что не все ошибки могут быть скорректированы. Необходимым и достаточным условием коррекции ошибок является

$$\langle \bar{i} | E_a^\dagger E_b | \bar{j} \rangle = \delta_{ab} \delta_{ij}, \quad (1.45)$$

где $|\bar{j}\rangle$ и $|\bar{i}\rangle$ являются кодовыми словами и принадлежат $\mathcal{H}_S$. Другими словами, ошибки не должны переводить различные кодовые слова в одинаковые.

Пример. В качестве примера построения квантовых кодов коррекции ошибок давайте рассмотрим случай, в котором для кодирования одного логического кубита используется три физических кубита ($n = 3$, $k = 1$). В качестве ошибок будем рассматривать ошибки инвертирования кубита. То есть подгруппу ошибок состоит из следующих элементов: $\mathcal{E} = \{X \otimes I \otimes I; I \otimes X \otimes I; I \otimes I \otimes X\}$. Выделив из 3-х кубитовой группы Паули все операторы, которые коммутируют друг с другом и антикоммутируют с операторами из $\mathcal{E}$, мы получим стабилизаторы вида

$$S = \{Z \otimes Z \otimes I; I \otimes Z \otimes Z; Z \otimes I \otimes Z\}. \quad (1.46)$$

Не сложно увидеть, что такая группа задается двумя генераторами вида $S = \{Z \otimes Z \otimes I; I \otimes Z \otimes Z\}$. Такой код определяет один логический кубит с собственными состояниями

$$|\bar{0}\rangle = |000\rangle, \quad (1.47)$$

$$|\bar{1}\rangle = |111\rangle. \quad (1.48)$$

Представленный здесь способ построения стабилизирующих кодов является общим для любых квантовых вычислений. В том числе, такой подход применим к однонаправленным вычислениям. Так, например, в работе [103] предложен стабилизирующий код, способный корректировать различные ошибки в однонаправленных квантовых вычислениях в дискретных переменных. В этой работе несколько соседних узлов кластера используются в качестве одного логического кубита.

1.5.3 Квантовые коды коррекции ошибок для непрерывных переменных

Одна из основных проблем, возникающая при вычислениях в непрерывных переменных – это смещение квадратур. Если при вычислении один из квантовых осцилляторов получит неконтролируемый скачек в $\hat{x}$ или $\hat{y}$ квадратурах, то квантовые вычисления будут искажены. При этом можно выделить два различных типа таких ошибок. К первому типу относятся ошибки, которые смещают квадратуры на большие случайные величины, но при этом происходят редко. К другому типу относятся ошибки, которые происходят постоянно, но, которые смещают квадратуры на малые величины. Именно ошибки второго типа являются неотъемлемой частью протокола однонаправленных квантовых вычислений в непрерывных переменных, что демонстрируется в третьей и четвертой главе диссертации, поэтому коррекции ошибок именно этого типа будет уделено здесь пристальное внимание.

Здесь важно отметить существование, так называемой, No-Go теоремы [104], которая утверждает, что гауссовы состояния не могут быть использованы для коррекции гауссовых

ошибок (ошибок определяемых гауссовыми преобразованиями) в гауссовых состояниях. Так как ошибки смещения квадратур относятся к гауссовым, то для их коррекции необходимо использовать негауссовы состояния. Авторами работы [70] был предложен квантовый код коррекции ошибок на основе этих состояний. Группа стабилизаторов этого кода имеет генераторы вида:

$$S = \{e^{2\sqrt{\pi}i\hat{x}}, e^{-2\sqrt{\pi}i\hat{y}}\}. \quad (1.49)$$

Такие генераторы порождают два кодовых слова следующего вида:

$$|\bar{0}\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(q - 2n\sqrt{\pi}) |q\rangle_x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |2n\sqrt{\pi}\rangle_x, \quad (1.50)$$

$$|\bar{1}\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(q - (2n+1)\sqrt{\pi}) |q\rangle_x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |(2n+1)\sqrt{\pi}\rangle_x. \quad (1.51)$$

Данные кодовые слова – это состояния осцилляторов, отождествляемые с состояниями кубита и соответствующие гребенкам, представленным на Рис. 1.5.

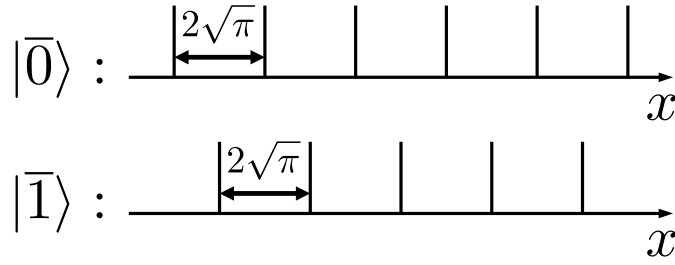


Рис. 1.5: Графическое изображение состояний $|\bar{0}\rangle$ и $|\bar{1}\rangle$ на фазовой плоскости.

Важно отметить, что представленные здесь состояния являются лишь математической абстракцией, поскольку такие гребенки являются бесконечно сжатыми. На практике в качестве таких кодовых слов используют нормализованные конечно-сжатые состояния вида:

$$|\tilde{0}\rangle = N_0 \sum_{s \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha^2/2(2s\sqrt{\pi})^2} \hat{T}(2s\sqrt{\pi}) |\psi_0\rangle, \quad (1.52)$$

$$|\tilde{1}\rangle = N_1 \sum_{s \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha^2/2((2s+1)\sqrt{\pi})^2} \hat{T}((2s+1)\sqrt{\pi}) |\psi_0\rangle, \quad (1.53)$$

где

$$|\psi_0\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{(\pi\Delta^2)^{1/4}} e^{-1/2q^2/\Delta^2} |q\rangle_x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(\pi/\Delta^2)^{1/4}} e^{-1/2\Delta^2 p^2} |p\rangle_y, \quad (1.54)$$

$N_{0,1}$ – нормализующие константы, $\hat{T}(\alpha)$ – оператор трансляции квадратуры x на α , Δ – ширина линии в комбе, α^{-1} – ширина огибающей всего комба. В отличие от состояний $|\bar{0}\rangle$ и $|\bar{1}\rangle$, представленные здесь состояния могут быть реализованы экспериментально, что было продемонстрировано в [105, 106]. В работе [107] было теоретически показано, что с помощью состояний $|\tilde{0}\rangle$ и $|\tilde{1}\rangle$ можно успешно уменьшать квантовые ошибки так, что их влияние на

результаты будет пренебрежимо мало. В дальнейшем для простоты мы будем рассматривать математические состояния $|\bar{0}\rangle$ и $|\bar{1}\rangle$, понимая, что все те же выкладки можно провести и для реальных состояний.

Если входные состояния, над которым проводятся вычисления, кодируются представленным кодом, то ошибки смещения могут быть измерены и скорректированы. Предположим, что мы приготовили осциллятор в состоянии $|\bar{\psi}\rangle = a|\bar{0}\rangle + b|\bar{1}\rangle$ и пусть на это состояние подействовала ошибка смещения $\hat{x}$ -квадратуры на величину u . В этом случае собственное число оператора $e^{2\sqrt{\pi}i\hat{x}}$ будет определяться следующим выражением

$$e^{2\sqrt{\pi}i\hat{x}} (e^{-iu\hat{y}}|\bar{\psi}\rangle) = e^{-iu\hat{y}} e^{2\sqrt{\pi}i\hat{x}} e^{2\sqrt{\pi}u[\hat{x},\hat{y}]}|\bar{\psi}\rangle = e^{i\sqrt{\pi}u} (e^{-iu\hat{y}}|\bar{\psi}\rangle). \quad (1.55)$$

Мы видим, что собственное число оператора $2\sqrt{\pi}\hat{x}$ изменилось с 0 на $\sqrt{\pi}u$, а это значит, что мы можем узнать об этом изменении измерив физическую величину, соответствующую оператору $2\sqrt{\pi}\hat{x}$.

Коррекция ошибок смещения

Для коррекции ошибок смещения $\hat{x}$ и $\hat{y}$ квадратур были предложены схемы [70], изображенные на Рис. 1.6 (a) и (b), соответственно.

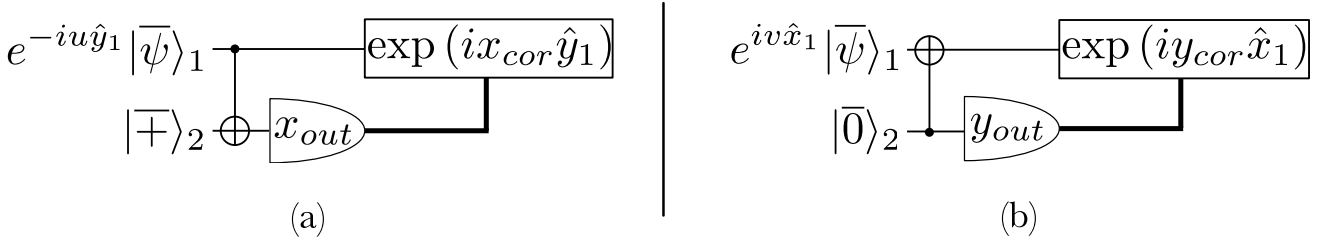


Рис. 1.6: Схемы коррекции ошибок: (a) – схема коррекции ошибок в $\hat{x}$ -квадратуре, (b) – схема коррекции ошибок в $\hat{y}$ -квадратуре. На рисунке $|\bar{\psi}\rangle_1$ – входное состояние, которое корректируется; $|\bar{+}\rangle_2$ и $|\bar{0}\rangle_2$ – вспомогательные состояния; толстой линией обозначен классический канал по которому передаются результаты измерений на приборы, смещающие квадратуры.

Две представленные схемы работают аналогичным образом, поэтому давайте здесь подробно разберем лишь схему (a). В данной схеме на состояние осциллятора $|\bar{\psi}\rangle$ действует ошибка смещения квадратуры $e^{-iu\hat{y}}$. Для коррекции этой ошибки подготавливается осциллятор во вспомогательном состоянии $|\bar{+}\rangle = |\bar{0}\rangle + |\bar{1}\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n\sqrt{\pi}\rangle_x$. Далее моды взаимодействуют управляемым образом посредством двухмодового аналога оператора $CNOT$, который в непрерывном случае преобразует квадратуры следующим образом [72]:

$$\hat{x}_{out,1} = \hat{x}_{in,1}, \quad \hat{x}_{out,2} = \hat{x}_{in,2} - \hat{x}_{in,1}, \quad (1.56)$$

$$\hat{y}_{out,1} = \hat{y}_{in,1} + \hat{y}_{in,2}, \quad \hat{y}_{out,2} = \hat{y}_{in,1}. \quad (1.57)$$

В результате действия $CNOT$ мы получим

$$e^{-iu\hat{y}_1}|\bar{\psi}\rangle_1|\bar{+}\rangle_2 \xrightarrow{CNOT} \sum_{n,n_0 \in \mathbb{Z}} (a|2n_0\sqrt{\pi} + u\rangle_{x,1} + b|(2n_0 + 1)\sqrt{\pi} + u\rangle_{x,1}) |n_1\sqrt{\pi} + u\rangle_{x,2}. \quad (1.58)$$

При измерении осциллятора во вспомогательном состоянии, мы получим результат измерения в виде $x_{out} = u + m\sqrt{\pi}$, где $m \in \mathbb{Z}$ – произвольное целое число. Чтобы скорректировать ошибку в состоянии $|\bar{\psi}\rangle$ мы должны сместить $\hat{x}$ -квадратуру соответствующего осциллятора на классическую величину $x_{cor} = x_{out} \bmod \sqrt{\pi}$. Из последнего соотношения следует, что для корректной работы данного кода коррекции необходимо, чтобы ошибка была меньше $\sqrt{\pi}/2$. В противном случае мы никогда не узнаем точное значение смещения u . В работе [107] была проведена оценка устойчивости данных кодов коррекции. В результате было выявлено, что код является полностью устойчивым (не накапливающим ошибку от числа операций), если величина ошибки будет меньше $\sqrt{\pi}/6$.

В работах [108, 109] было исследовано использование таких кодов коррекции для однонаправленных квантовых вычислений в непрерывных переменных. Авторы работ предлагают примешивать к неизмеряемым (выходным) узлам кластеров вспомогательные осцилляторы в состояниях $|\bar{+}\rangle$ и $|\bar{0}\rangle$. В результате проведения стандартной процедуры однонаправленных вычислений в выходных состояниях можно будет провести коррекцию ошибок смещения квадратур, аналогично схемам, изображенным на Рис. 1.6.

Еще раз подчеркнем, что предложенная процедура корректирует лишь достаточно малые ошибки, так что вопрос уменьшения ошибки квантовых вычислений, рассматриваемый нами в Главе 4, весьма актуален в свете рассмотренного подхода.

Глава 2

Критерий оценки минимального сжатия для генерации кластерных состояний

В этой главе мы получим критерий, определяющий минимальную степень квадратурного сжатия необходимую для формирования кластерного состояния с заданной конфигурацией. С помощью этого критерия мы найдем, какие из узлов кластерного состояния требуют для своего формирования наибольшей степени сжатия, и затем для одного узла оценим максимальное количество соседних узлов, перепутанных с ним. Это позволит нам оценить различные конфигурации квантовых кластерных состояний количественно, и на основе этих оценок сформулировать оптимальные стратегии по их генерации. Результаты данной главы были впервые освещены мной в работе [110].

2.1 Преобразование Боголюбова для кластерных состояний

Давайте рассмотрим задачу формирования кластерного состояния определенной конфигурации из набора квантовых осцилляторов со сжатыми $\hat{y}$ -квадратурами. В общем случае, процесс генерации кластера можно описать с помощью преобразования Боголюбова [111] над исходной совокупностью независимых квадратурно-сжатых осцилляторов:

$$\hat{\vec{X}} + i\hat{\vec{Y}} = U \left(\hat{\vec{x}}_s + i\hat{\vec{y}}_s \right) = \left(\text{Re } U\hat{\vec{x}}_s - \text{Im } U\hat{\vec{y}}_s \right) + i \left(\text{Re } U\hat{\vec{y}}_s + \text{Im } U\hat{\vec{x}}_s \right), \quad (2.1)$$

где $U = (\text{Re } U + i \text{Im } U)$ – это унитарная матрица фиксирующая конкретный набор преобразований совершаемых над подсистемами, так, что результат преобразования, отвечает матрице смежности A (ниже мы обсудим связь этих матриц); $\hat{\vec{Y}} = \left(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \dots, \hat{Y}_n \right)^T$, $\hat{\vec{X}} = \left(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_n \right)^T$ – векторы, элементами которых являются квадратуры узлов кластерного состояния; $\hat{\vec{y}}_s = (\hat{y}_{s,1}, \hat{y}_{s,2}, \dots, \hat{y}_{s,n})^T$ и $\hat{\vec{x}}_s = (\hat{x}_{s,1}, \hat{x}_{s,2}, \dots, \hat{x}_{s,n})^T$ – это векторы, состоящие из квадратур осцилляторов, используемых при генерации (индекс s указывает на то, что эти осцилляторы сжаты).

Полученное состояние будет являться кластерным только в том случае, если среднеквадратичные флуктуации всех операторов нулифайеров (1.23) равны нулю. Однако, в реальности, из-за использования осцилляторов с конечным сжатием, это неосуществимо, поэтому можно говорить лишь о стремлении к нулю при стремлении к бесконечности сжатия используемых квантовых осцилляторов. То есть, для n -узлового кластерного состояния должны выполняться следующие условия:

$$\forall j = 1, \dots, n, \quad \lim \langle \delta \hat{N}_j^2 \rangle = 0, \quad \text{при} \quad \langle \delta \hat{y}_{s,1}^2 \rangle \rightarrow 0, \dots, \langle \delta \hat{y}_{s,n}^2 \rangle \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

Для дальнейшего анализа нам удобнее всего записать все n нулифайеров кластерного состояния (1.23) в векторном виде

$$\hat{\vec{N}} = \begin{pmatrix} \hat{N}_1 \\ \hat{N}_2 \\ \vdots \\ \hat{N}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{Y}_1 - g_{12}\hat{X}_2 - g_{13}\hat{X}_3 - \dots - g_{1n}\hat{X}_n \\ \hat{Y}_2 - g_{21}\hat{X}_1 - g_{23}\hat{X}_3 - \dots - g_{2n}\hat{X}_n \\ \vdots \\ \hat{Y}_n - g_{n1}\hat{X}_1 - g_{n2}\hat{X}_2 - \dots - g_{nn-1}\hat{X}_{n-1} \end{pmatrix} = \hat{\vec{Y}} - A\hat{\vec{X}}, \quad (2.3)$$

где $g_{ij} \in \mathbb{R}$ – это веса ребер графа кластерного состояния, а матрица A является матрицей смежности графа кластерного состояния и имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & g_{12} & g_{13} & \dots & g_{1n} \\ g_{12} & 0 & g_{23} & \dots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{1n} & g_{2n} & g_{3n} & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

По определению, матрица смежности – это матрица, элементы которой равны весам ребер g_{ij} , соединяющим вершины i и j графа G . Для ненаправленных графов без петель, которыми и описываются кластерные состояния, матрицы смежности всегда симметричны ($A^T = A$) и имеют нулевые главные диагонали. Давайте рассмотрим следующий пример описания графов с помощью матриц смежности.

Пример 1. Рассмотрим два графа, которые имеют одинаковое расположение узлов, но разные весовые коэффициенты.

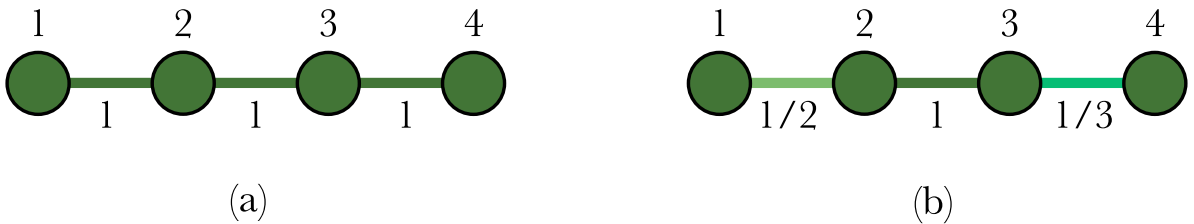


Рис. 2.1: Два линейных четырехузловых графа с одинаковым расположением узлов. Граф (a) является невзвешенным (с единичными весовыми коэффициентами). Граф (b) имеет ребра с различными весами, значения которых отмечены на рисунке.

- Для графа (a) мы имеем $g_{12} = g_{23} = g_{34} = 1$, а значит матрица смежности для данного графа имеет следующий вид:

$$A^{(a)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Графа (b) имеет следующие весовые коэффициенты: $g_{12} = 1/2$, $g_{23} = 1$, $g_{34} = 1/3$. Матрица смежности данного графа записывается, как

$$A^{(b)} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

После того, как мы ввели вектор $\hat{\vec{N}}$, мы можем найти явный вид преобразования Боголюбова U , заданного с помощью матрицы смежности A . Для этого подставим квадратуры из выражения (2.1) в (2.3). В результате мы получим следующее равенство

$$\hat{\vec{N}} = \text{Re } U \hat{\vec{y}}_s + \text{Im } U \hat{\vec{x}}_s - A \left(\text{Re } U \hat{\vec{x}}_s - \text{Im } U \hat{\vec{y}}_s \right) = (\text{Im } U - A \cdot \text{Re } U) \hat{\vec{x}}_s + (\text{Re } U + A \cdot \text{Im } U) \hat{\vec{y}}_s. \quad (2.6)$$

Мы считаем, что все $\hat{y}$ -квадратуры сжаты, а значит, в силу принципа неопределенности Гейзенберга $\hat{x}$ -квадратуры растянуты. По этой причине стремление среднеквадратичных флуктуаций нуллифайеров (2.6) к нулю возможно только при равенстве нулю коэффициентов перед растянутыми квадратурами $\hat{x}$, т. е. набор преобразований U обязан удовлетворять равенству

$$\text{Im } U = A \cdot \text{Re } U. \quad (2.7)$$

Таким образом, для вектора нуллифайеров $\hat{\vec{N}}$ и матрицы преобразования Боголюбова U мы получили следующие связи

$$\hat{\vec{N}} = (I + A^2) \text{Re } U \vec{y}_s, \quad (2.8)$$

$$U = \text{Re } U + i \text{Im } U = (I + iA) \text{Re } U. \quad (2.9)$$

В этих уравнениях матрица $\text{Re } U$ остается неизвестной. Для того, чтобы ее конкретизировать воспользуемся условием унитарности матрицы U

$$U^\dagger U = ((I + iA) \text{Re } U)^\dagger (I + iA) \text{Re } U = (\text{Re } U)^T (I + A^2) \text{Re } U = I,$$

$$(I + A^2) = ((\text{Re } U)^T)^{-1} (\text{Re } U)^{-1} = (\text{Re } U (\text{Re } U)^T)^{-1} \Rightarrow \text{Re } U (\text{Re } U)^T = (I + A^2)^{-1}. \quad (2.10)$$

Полученные выражения являются следствиями того, что матрица $\text{Re } U$ является вещественной, а матрица A – ортогональной.

Воспользуемся теперь полярным разложением матрицы $\text{Re } U$. Полярное разложение — это представление произвольной квадратной матрицы M в виде произведения эрмитовой H ($H = H^\dagger$) и унитарной $\mathcal{U}$ ($\mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} = \mathcal{U} \mathcal{U}^\dagger = I$) матриц $M = H\mathcal{U}$. Так как матрица $\text{Re } U$ является вещественной, то полярное разложение для нее превратится в произведение симметричной матрицы S ($S = S^T$) и некоторой ортогональной матрицы Q ($QQ^T = Q^T Q = I$). Подставляя это разложение в уравнение (2.10), мы получим

$$\begin{aligned} SQ(SQ)^T &= SQQ^T S = S^2 = (I + A^2)^{-1} \\ \Rightarrow S &= (I + A^2)^{-1/2} \\ \Rightarrow \text{Re } U &= (I + A^2)^{-1/2} Q. \end{aligned}$$

Используя полученные соотношения, перепишем выражения (2.8) и (2.9) в виде

$$\hat{\vec{N}} = (I + A^2)^{1/2} Q \vec{y}_s, \quad (2.11)$$

$$U = (I + iA)(I + A^2)^{-1/2} Q. \quad (2.12)$$

Проанализируем полученный результат. Мы получили зависимость нуллифайеров и матрицы преобразования Боголюбова U от конфигурации графа G . В полученных формулах присутствует произвольная ортогональная матрица Q , с точностью до которой определены эти преобразования. Возникает вопрос на что же влияет матрица Q . Полагая, что однонаправленные квантовые вычисления зависят только от конфигурации кластерного состояния, авторы [112] показывают влияние этой матрицы на процедуру генерации. Кроме того можно предположить, что с ее помощью можно минимизировать ошибки, которые появляются в процессе генерации за счет неидеальности физических систем.

Таким образом, для кластерного состояния, характеризуемого графом G мы указали связь между явным видом преобразования Боголюбова U и матрицей смежности A . Далее, используя выражения (2.11) и (2.12) в случае одинаковых осцилляторов, на основе которых строится кластерное состояние, мы докажем теорему о связи среднеквадратичных флуктуаций нуллифайеров и среднеквадратичных флуктуаций $\langle \delta \hat{y}_{s,i}^2 \rangle$.

2.2 Критерий минимальной степени сжатия

Для генерации квантовых физических систем в кластерных состояниях важно знать зависимость среднеквадратичных флуктуаций нуллифайеров от среднеквадратичных флуктуаций квадратур независимых квантовых гармонических осцилляторов, на основе которых эти кластерные состояния были получены. В общем случае, когда квадратуры этих осцилляторов сжаты по-разному, получить универсальное выражение не удастся. Однако для одинаково сжатых осцилляторов эта зависимость будет определяться только лишь матрицей смежности A . Докажем следующую теорему.

Теорема. Пусть мы имеем кластерное состояние, которое отвечает графу G с матрицей смежности A , заданной весовыми коэффициентами g_{ij} . Пусть $Q \in M^{n \times n}$ – это ортогональная матрица в полярном разложении вещественной части преобразования Боголюбова U ($\text{Re } U = (I + A^2)^{-1/2} Q$). Тогда, если квантовые осцилляторы, на основе которых генерируется кластерное состояние, имеют одинаковую степень сжатия и являются статистически независимыми, то среднеквадратичные флуктуации нуллифайеров кластерного состояния могут быть выражены через среднеквадратичные флуктуации исходных сжатых осцилляторов в следующем виде

$$\langle \delta \hat{N}_j^2 \rangle = \left(1 + \sum_{i=1}^n g_{ij}^2 \right) \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.13)$$

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся выражением (2.11)

$$\hat{N} = (I + A^2)^{1/2} Q \hat{y}_s.$$

Выпишем j -ый нуллифайер, введя обозначение $V = (I + A^2)^{1/2}$

$$\hat{N}_j = \sum_{k=1}^n v_{jk} \sum_{p=1}^n q_{kp} \hat{y}_{s,p},$$

где v_{jk} – элементы матрицы V , q_{kp} – элементы матрицы Q . Рассмотрим среднеквадратичные флуктуации этого нуллифайера

$$\begin{aligned} \langle \delta \hat{N}_j^2 \rangle &= \left\langle \delta \left(\sum_{k=1}^n v_{jk} \sum_{p=1}^n q_{kp} \hat{y}_{s,p} \right)^2 \right\rangle = \left\langle \delta \left(\sum_{p=1}^n \left(\sum_{k=1}^n v_{jk} q_{kp} \right) \hat{y}_{s,p} \right)^2 \right\rangle = \sum_{p=1}^n \left(\sum_{k=1}^n v_{jk} q_{kp} \right)^2 \langle \delta y_s^2 \rangle = \\ &= \sum_{p=1}^n \left(\sum_{k=1}^n v_{jk}^2 q_{kp}^2 + 2 \sum_{w=1}^n \sum_{r=w+1}^n (v_{jw} q_{wp}) (v_{jr} q_{rp}) \right) \langle \delta y_s^2 \rangle. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь мы использовали то, что квантовые осцилляторы являются статистически независимыми, т.е.

$$\langle \delta \hat{y}_{s,i} \delta \hat{y}_{s,j} \rangle = \delta_{ij} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle, \quad (2.15)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Распишем отдельно первый и второй члены множителя в правой части выражения (2.14):

$$\sum_{p=1}^n \sum_{k=1}^n v_{jk}^2 q_{kp}^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^n v_{jk}^2 q_{kp}^2 = \sum_{k=1}^n v_{jk}^2 \sum_{p=1}^n q_{kp}^2 = \sum_{k=1}^n v_{jk}^2 (\vec{q}_k, \vec{q}_k) = \sum_{k=1}^n v_{jk}^2, \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n \left(\sum_{w=1}^n \sum_{r=w+1}^n (v_{jw} q_{wp}) (v_{jr} q_{rp}) \right) &= \sum_{w=1}^n \sum_{r=w+1}^n (v_{jw} v_{jr}) \sum_{p=1}^n (q_{wp} q_{rp}) = \\ &= \sum_{w=1}^n \sum_{r=w+1}^n (v_{jw} v_{jr}) (\vec{q}_w, \vec{q}_r) = 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где $\vec{q}_i = (q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{in})^T$ – это вектор-строка, соответствующий i -ой строке ортогональной матрицы Q . В приведенных выражениях мы воспользовались тем фактом, что у ортогональной матрицы все строки и все столбцы ортонормированы, т. е. $(\vec{q}_i, \vec{q}_j) = \delta_{ij}$. Учитывая (4.26) и (2.17), запишем выражение для среднеквадратичных флуктуаций нулифайера (2.14) в следующем виде:

$$\langle \delta \hat{N}_j^2 \rangle = \sum_{k=1}^n v_{jk}^2 \langle \delta y_s^2 \rangle. \quad (2.18)$$

Рассмотрим теперь матрицу $V = (I + A^2)^{1/2}$. Матрица смежности для кластерного состояния является симметричной, то есть $A = A^T$. Из этого следует, что

$$(A^2)^T = (AA)^T = A^T A^T = AA = A^2.$$

Это означает, что $(I + A^2)^T = (I + A^2)$, а значит V также является симметричной ($V = V^T$), так как

$$(VV)^T = (I + A^2)^T = (I + A^2) = VV.$$

Таким образом, для диагональных элементов $[V^2]_{jj}$, с одной стороны, мы имеем

$$[V^2]_{jj} = \sum_{k=1}^n v_{jk}^2,$$

а, с другой стороны,

$$[V^2]_{jj} = [I + A^2]_{jj} = 1 + [A^2]_{jj}.$$

Так как A – матрица смежности, то из ее симметрии следует, что $[A^2]_{jj} = \sum_{i=1}^n g_{ij}^2$. Объединяя полученные результаты, мы получаем итоговое выражение для нулифайеров

$$\langle \delta \hat{N}_j^2 \rangle = \left(1 + \sum_{i=1}^n g_{ij}^2 \right) \langle \delta y_s^2 \rangle, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.19)$$

□

Доказанная теорема дает нам инструмент для простого вычисления флуктуаций нулифайеров. Как будет показано в этой главе, это позволяет ответить на вопрос о сепарабельности или несепарабельности состояния, соответствующего определенному графу.

Пример 2. Рассмотрим кластерное состояние, соответствующее следующему графу:

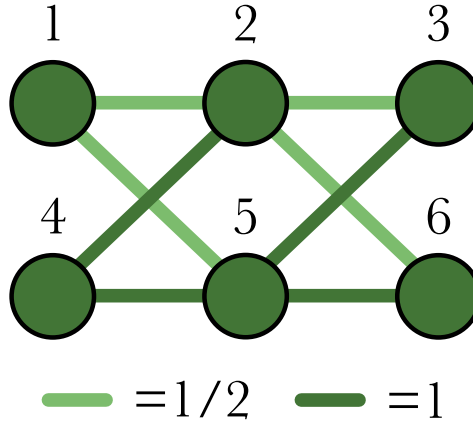


Рис. 2.2: Граф шестиузлового кластерного состояния, с разными весовыми коэффициентами. Светло-зеленый цвет на графе отвечает связи с коэффициентом $1/2$, а темно-зеленый – 1 .

На графе темно-зелеными линиями обозначены связи с весовыми коэффициентами равными единице, а светло-зелеными – связи с весами $1/2$. Согласно доказанной теореме, среднеквадратичные флуктуации нуллифайеров у такого кластерного состояния будут равны

$$\begin{aligned}\langle \delta \hat{N}_1^2 \rangle &= \frac{3}{2} \langle \delta y_s^2 \rangle, & \langle \delta \hat{N}_2^2 \rangle &= \frac{11}{4} \langle \delta y_s^2 \rangle, & \langle \delta \hat{N}_3^2 \rangle &= \frac{9}{4} \langle \delta y_s^2 \rangle, \\ \langle \delta \hat{N}_4^2 \rangle &= 3 \langle \delta y_s^2 \rangle, & \langle \delta \hat{N}_5^2 \rangle &= \frac{17}{4} \langle \delta y_s^2 \rangle, & \langle \delta \hat{N}_6^2 \rangle &= \frac{9}{4} \langle \delta y_s^2 \rangle.\end{aligned}$$

Следствие 1. В случае, когда кластерное состояние является невзвешенным, т. е. все его ненулевые весовые коэффициенты равны единице, мы имеем

$$\langle \delta \hat{N}_j^2 \rangle = (1 + \deg[j]) \langle \delta y_s^2 \rangle, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.20)$$

где $\deg[j]$ – это число соседей у j -го узла графа кластерного состояния.

Доказательство. Из выражения (2.19) следует, что, если все ненулевые весовые коэффициенты g_{ij} равны единице, то сумма в правой части превращается в размерность множества соседних узлов $\deg[j]$ для узла j .

$$\langle \delta \hat{N}_j^2 \rangle = (1 + \deg[j]) \langle \delta y_s^2 \rangle, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.21)$$

□

Таким образом, среднеквадратичные флуктуации j -ого нуллифайера в случае невзвешенного графа определяются только количеством узлов графа G , связанных с узлом j .

Пример 3. Рассмотрим невзвешенное кластерное состояние, соответствующее линейному графу, изображенному на Рис. 2.1 (а). На графе все связи одинаковы и равны единице. Среднеквадратичные флуктуации нуллифайеров этого кластерного состояния, согласно Следствию 1, будут равны

$$\langle \delta \hat{N}_1^2 \rangle = 2 \langle \delta y_s^2 \rangle, \quad \langle \delta \hat{N}_2^2 \rangle = 3 \langle \delta y_s^2 \rangle, \quad \langle \delta \hat{N}_3^2 \rangle = 3 \langle \delta y_s^2 \rangle, \quad \langle \delta \hat{N}_4^2 \rangle = 2 \langle \delta y_s^2 \rangle.$$

После того, как мы доказали теорему о среднеквадратичных флуктуациях нуллифайеров кластерного состояния в случае одинаковых независимых квантовых осцилляторов, на которых оно было построено, мы можем рассмотреть такие кластерные состояния с помощью критерия сепарабельности ван Лука-Фурусавы [66]. Этот критерий позволяет нам указать условие минимального сжатия, которым должны обладать осцилляторы, чтобы на их основе можно было построить кластер заданной конфигурации.

Следствие 2. *Для создания кластерного состояния, отвечающего графу G с матрицей смежности A , заданной весовыми коэффициентами g_{ij} , нам необходимо потребовать, чтобы сжатие каждого исходного квантового осциллятора удовлетворяло неравенству*

$$\langle \delta y_s^2 \rangle < \min_{(i,j)} \left[\frac{|g_{ij}|}{2 + \sum_{k=1}^n g_{ki}^2 + \sum_{l=1}^n g_{lj}^2} \right],$$

где минимум в правой части ищется среди всех пар соседних узлов i и j .

Доказательство. Применим критерий сепарабельности ван Лука-Фурусавы (1.24) к кластерному состоянию, отвечающему графу G . Для этого в качестве канонических переменных рассмотрим квадратуры кластерного состояния, а в качестве операторов $\hat{u}$ и $\hat{v}$ будем использовать нуллифайеры соседних узлов кластерных состояний, т.е. $\hat{v} = \hat{N}_i = \hat{Y}_i - \sum_{k=1}^n g_{ik} \hat{X}_k$ и $\hat{u} = \hat{N}_j = \hat{Y}_j - \sum_{k=1}^n g_{jk} \hat{X}_k$, то мы получим неравенство с условием

$$\langle \delta \hat{N}_i^2 \rangle + \langle \delta \hat{N}_j^2 \rangle \geq \begin{cases} 0, & \text{если } i \text{ не сосед } j, \\ |g_{ij}|, & \text{если } i \text{ сосед } j \end{cases}, \quad (2.22)$$

Первое условие является тривиальным, поскольку выполняется всегда и не несет никакой информации о связи между узлами. Второе же условие задает критерий сепарабельности двух соседних узлов кластерного состояния. Если это условие невыполняется, то есть при

$$\langle \delta \hat{N}_i^2 \rangle + \langle \delta \hat{N}_j^2 \rangle < |g_{ij}|, \quad (2.23)$$

узлы кластерного состояния будут несепарабельны (перепутаны).

Подставим в это неравенство среднеквадратичные флуктуации нуллифайеров (2.19), полученные в теореме

$$\langle \delta \hat{N}_i^2 \rangle + \langle \delta \hat{N}_j^2 \rangle = \left(2 + \sum_{k=1}^n g_{ki}^2 + \sum_{l=1}^n g_{lj}^2 \right) \langle \delta y_s^2 \rangle < |g_{ij}|.$$

Для среднеквадратичных флуктуаций $\hat{y}$ -квадратуры получим

$$\langle \delta y_s^2 \rangle < \frac{|g_{ij}|}{2 + \sum_{k=1}^n g_{ki}^2 + \sum_{l=1}^n g_{lj}^2}. \quad (2.24)$$

В зависимости от конфигурации графа правая часть этого уравнения может варьироваться. Так как для создания кластерного состояния среднеквадратичные флуктуации нулифайеров должны стремиться к нулю, минимизируем величину в правой части (2.24) по номерам i и j соседних вершин графа G

$$\langle \delta y_s^2 \rangle < \min_{(i,j)} \left[\frac{|g_{ij}|}{2 + \sum_{k=1}^n g_{ki}^2 + \sum_{l=1}^n g_{lj}^2} \right]. \quad (2.25)$$

Таким образом, мы получили критерий оценки сжатия $\hat{y}$ -квадратур исходных квантовых осцилляторов, на основе которых генерируется кластерное состояние. $\square$

Рассмотрим пример применения Следствия 2.

Пример 4. Рассмотрим невзвешенное линейное четырехузловое кластерное состояние, граф которого изображен на Рис. 2.1 (а). Для такого кластерного состояния мы получим два типа условий

$$\langle \delta y_s^2 \rangle < \frac{1}{5}, \quad \langle \delta y_s^2 \rangle < \frac{1}{6}.$$

Так как нам нужно выбрать минимум, то условие на несепарабельность кластерного состояния записывается как

$$\langle \delta y_s^2 \rangle < \frac{1}{6}.$$

Это условие говорит нам о том, что для создания кластера с такой конфигураций достаточно иметь 4 осциллятора, квадратуры которых сжаты сильнее, чем $-1,77$ дБ.

Пример 5. Рассмотрим кластерное состояние, соответствующее графу

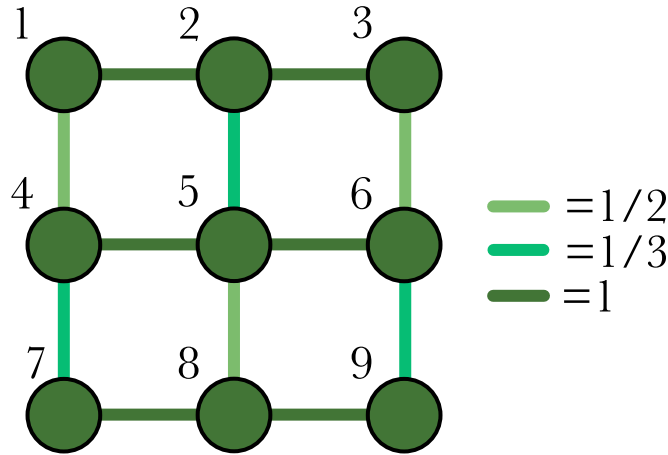


Рис. 2.3: Граф девятиузловое квадратного кластерного состояния с разными весовыми коэффициентами.

Условие на несепарабельность этого состояния имеет вид

$$\langle \delta y_s^2 \rangle < \frac{12}{233}.$$

В этом случае сжатие должно превышать $-6,86$ дБ.

Рассмотренные примеры демонстрируют, что для построения кластерного состояния достаточно конечного, вполне реализуемого экспериментально, сжатия. Отметим также, что более сложная и разветвленная структура кластера диктует более строгие условия для его формирования. С этой точки зрения, использование простых (например, линейных) кластеров предпочтительно, если они удовлетворяют вычислительным потребностям.

Полученное выше утверждение позволяет нам также рассмотреть обратную задачу: кластер какой структуры мы можем создать имея для этого фиксированный ресурс.

Следствие 3. При создании невзвешенного кластерного состояния с помощью статистически независимых осцилляторов с фиксированной степенью сжатия $\langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$, максимальное число соседей у двух соседних узлов в кластерном состоянии оценивается неравенством

$$\max_{(i,j)} [\deg[j] + \deg[i]] < \frac{1}{\langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle} - 2, \quad (2.26)$$

где максимум в правой части ищется среди всех пар соседних узлов i и j .

Доказательство. Перепишем неравенство (2.25) в виде

$$\frac{2 + \max_{(i,j)} \left[\sum_{k=1}^n g_{ki}^2 + \sum_{l=1}^n g_{lj}^2 \right]}{\min_{(i,j)} [g_{ij}]} < \frac{1}{\langle \delta y_s^2 \rangle}. \quad (2.27)$$

Так как мы рассматриваем невзвешенное кластерное состояние, у которого все ненулевые коэффициенты равны единице, то заменим ненулевые g_{ij} в выражении (2.27) на единицы. В результате $\min_{(i,j)} [g_{ij}] = 1$, а суммы $\sum_{k=1}^n g_{ki}^2$ и $\sum_{l=1}^n g_{lj}^2$ превратятся в $\deg[i]$ и $\deg[j]$ (степени i -ой и j -ой вершины), соответственно. Далее выразив $\max_{(i,j)} (\deg[j] + \deg[i])$ мы получим неравенство (2.26). $\square$

Данное следствие показывает максимальное число ребер, исходящих из двух соседних узлов графа при заданной степени сжатия $\langle \delta y_s^2 \rangle$. Рассмотрим пример применения Следствия 3.

Пример 6. Предположим, что мы хотим создать невзвешенное кластерное состояние и при этом имеем осцилляторы, у которых сжатие $\hat{y}$ -квадратуры составляет -6 дБ, т. е. $\langle \delta y_s^2 \rangle \approx 0.06$. Используя Следствие 3, мы получим условие на максимальное число ребер у двух соседних узлов в кластерном состоянии

$$\max_{(i,j)} [\dim(Nb[j]) + \dim(Nb[i])] < 14,$$

т.е. максимальное число ребер у двух соседних узлов, не должно превышать 13. Далее мы можем распределить эти 13 ребер между двумя узлами так, чтобы получилось кластерное состояние, которое будет выполнять определенные квантовые вычисления.

Из Примера 5 и Примера 6 видно, что невзвешенное кластерное состояние менее требовательно к степени сжатия используемых квантовых осцилляторов. При сжатии в -6 дБ мы можем сгенерировать невзвешенное кластерное состояние с тринадцатью ребрами у двух соседних узлов, и не можем сгенерировать кластерное состояние с графом, изображенным на Рис. 2.3.

2.3 Заключение по главе 2

В этой главе мы рассмотрели математическую процедуру формирования кластерных состояний на основе одинаковых независимых квадратурно-сжатых осцилляторов. Мы показали, что с помощью элементов матрицы смежности среднеквадратичные флуктуации нуллифайеров кластерного состояния могут быть выражены через среднеквадратичные флуктуации квадратур (или степень сжатия) этих осцилляторов. Это позволило нам сформулировать критерий, определяющий минимальную степень квадратурного сжатия необходимую для формирования кластерного состояния с заданной конфигурацией. Используя этот критерий, мы показали, что минимальная степень сжатия определяется узлами, связанными с наибольшим количеством соседних узлов графа кластерного состояния. Мы оценили максимально возможное количество соседних узлов на графе в зависимости от степени сжатия осцилляторов.

Исследование конфигурации кластерного состояния интересно с двух позиций: с точки зрения создания кластера определенной конфигурации на основе имеющегося ресурса и с точки зрения организации вычислений в ограниченных условиях. Первый вопрос мы обсудили в этой главе, второй будет разобран в следующих.

Глава 3

Классификация кластерных состояний по типу вычислений

Прежде чем приступить к классификации кластерных состояний, вспомним определение гауссовых преобразований. Как уже отмечалось в первой главе диссертации, гауссовы преобразования – это преобразования, гамильтониан которых имеет степень не выше второй. Такие преобразования не выводят гауссовы состояния из своего класса, а значит, их действие на квадратуры является линейным. С математической точки зрения, любое гауссово преобразование квадратур может быть записано следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out} \\ \hat{Y}_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где $\hat{x}_{in}$ и $\hat{y}_{in}$ – это векторы входных квадратур, над которыми проводятся преобразования, $\hat{X}_{out}$ и $\hat{Y}_{out}$ – это векторы квадратур, являющиеся результатами преобразований, $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ – это векторы, состоящие из классических вещественных величин, S_1, S_2, S_3, S_4 – это вещественные блочные квадратные матрицы, составляющие матрицу основного преобразования. Для сохранения коммутационных соотношений матрица основного преобразования должна подчиняться следующему условию:

$$\begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbb{O} & I \\ -I & \mathbb{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & I \\ -I & \mathbb{O} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Другими словами, матрица основного преобразования должна быть симплектической.

Так как в модели однонаправленных квантовых вычислений гауссовы преобразования реализуются с помощью локальных гомодинных измерений перепутанных узлов кластерного состояния, то матрицы $\{S_i\}_{i=1}^4$ должны зависеть от графов используемых кластерных состояний и от базисов гомодинных детекторов. Наша основная цель состоит в выявлении явного вида этих зависимостей. Решение такой задачи интересно, в первую очередь, с точки зрения процесса оптимизации вычислений. Как мы уже знаем, имея в своем распоряжении квантовый осциллятор с фиксированным сжатием, можно генерировать кластерные состояния

различных конфигураций. В этой главе мы ответим на вопрос о том, какие из всевозможных конфигураций пригодны для универсальных гауссовых вычислений. Для этой цели мы проведем классификацию кластерных состояний и для каждого класса построим общие выражения типа (3.1). Далее мы используем полученные выражения, чтобы определить, какие преобразования можно осуществить на данных состояниях, и выделим конфигурации, пригодные для универсальных гауссовых вычислений.

В этой главе мы ищем конфигурации кластерных состояний только для гауссовых преобразований. Мы не будем рассматривать негауссовы преобразования, поскольку для их реализации уже был теоретически предложен алгоритм однонаправленных вычислений с использованием двухузлового кластерного состояния (состояния с минимальным нетривиальным числом узлов) [76].

3.1 Классификация кластерных состояний

Конечной целью данной главы является выявление конфигурации кластерного состояния, позволяющей выполнять универсальный набор гауссовых преобразований. Для этого мы хотим найти формулу, связывающую квадратуры входных осцилляторов, над которыми производится преобразование, с квадратурами выходных для кластера произвольной конфигурации. Оказывается, что записать такое выражение в общем случае не представляется возможным. Однако, мы можем подразделить все конфигурации кластерных состояний на несколько групп, и построить требуемую связь для каждого типа конфигураций. Основным аргументом в поддержку этого подхода является возможность построения аналитического решения для каждого класса состояний кластера.

Прежде чем объяснить наш принцип классификации, давайте вспомним как происходит процесс однонаправленных квантовых вычислений на кластерных состояниях в непрерывных переменных. Весь процесс можно разделить на три шага. На первом шаге с помощью преобразования Боголюбова (2.12) n сжатых квантовых осцилляторов превращаются в n -узловое кластерное состояние, отвечающее определенному графу. Второй шаг состоит в примешивании m входных состояний, над которыми будут проводиться преобразования, к некоторым узлам кластерного состояния с помощью симметричных светоделителей. На следующем шаге проходит процесс локальных гомодинных измерений. Измеряются все m входных состояний и $(n - m)$ узлов кластерного состояния. Далее к каждому неизмеренному узлу кластера применяются операторы $\hat{X}(s)$ и $\hat{Z}(s')$, параметры которых (s и s') подбираются с учетом результатов измерений, выполненных на прошлом шаге процесса вычислений. В результате всего этого, квадратуры m оставшихся узлов кластерного состояния будут определяться выражением типа (3.1).

Из описанного процесса видно, что узлы кластера, к которым примешиваются входные моды, выделяются самой процедурой вычислений. Поэтому оказывается важным, производятся ли локальные измерения непосредственно над этими узлами, "транслируя" входное

состояние на другие узлы кластера, или же эти моды не подвергаются локальным измерениям и служат выходными модами. Оказывается, что математически эти две ситуации различны, так что мы будем подразделять рассматриваемые вычисления по этому принципу. Этот принцип классификации показан на Рис. 3.1.

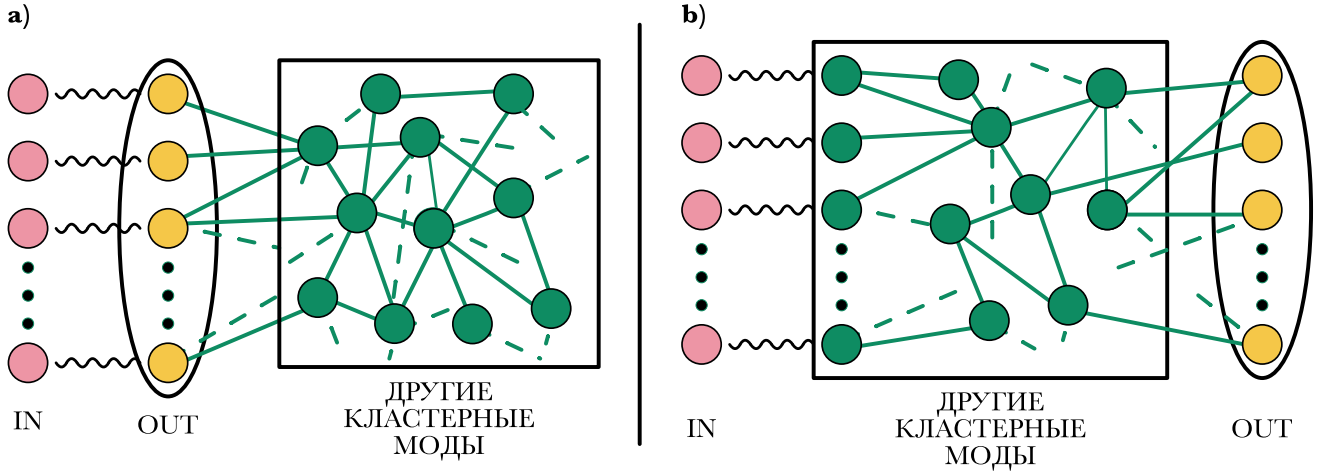


Рис. 3.1: Схемы вычислений на кластерных состояниях. IN обозначены входные моды, OUT – выходные, волнистой линией обозначены связи с помощью симметричных светоделителей. а) Входные моды примешиваются сразу к выходным модам. б) Входные моды примешиваются к кластерным модам, которые будут впоследствии измерены.

Кроме того, вычисления существенно зависят от числа узлов в кластерном состоянии. Точнее, от соотношения между числом входных состояний и общим числом узлов в кластере. Соответственно, мы обсудим ниже четыре случая:

- входные моды примешиваются к выходным, $n = m$,
- входные моды примешиваются к выходным, $n > m$,
- входные моды примешиваются к измеряемым, $n \leq 2m$,
- входные моды примешиваются к измеряемым, $n > 2m$.

Давайте перейдем теперь непосредственно к нахождению связи между выходными и входными квадратурами, получаемой при вычислениях на кластерных состояниях различных конфигураций.

3.2 Случай вычислений, когда входные состояния примешиваются к выходным ($n=m$)

Рассмотрим первый случай квантовых вычислений на кластерных состояниях. Пусть у нас имеются m входных состояний, и кластерное состояние состоящее из $n = m$ узлов. Из-за

того, что для вычислений необходимо, чтобы число узлов в кластере было не меньше числа входных мод, такое кластерное состояние является минимальным.

Для вывода соотношений нам понадобится связь между операторами квадратур кластерного состояния и операторами квадратур сжатых квантовых осцилляторов, используемых для генерации данного кластера. С помощью выражения (2.9) эта связь задается следующим образом:

$$\hat{\vec{X}} + i\hat{\vec{Y}} = U \left(\hat{\vec{x}}_s + i\hat{\vec{y}}_s \right) = (I_n + iA) \text{Re } U \left(\hat{\vec{x}}_s + i\hat{\vec{y}}_s \right) \equiv (I_n + iA) \left(\hat{\vec{x}}_r + i\hat{\vec{y}}_r \right), \quad (3.3)$$

где $\hat{\vec{X}}$ и $\hat{\vec{Y}}$ – это векторы, состоящие из операторов квадратур мод кластерного состояния, $\hat{\vec{x}}_s$ и $\hat{\vec{y}}_s$ – это векторы операторов квадратур сжатых квантовых осцилляторов, U – унитарное преобразование, превращающее осцилляторы в сжатом состоянии в осцилляторы в кластерном состоянии (преобразование Боголюбова), I_n – единичная матрица размерности n , A – это матрица смежности графа кластерного состояния. Здесь для краткости нами были введены обозначения новых квадратур $\hat{\vec{x}}_r \equiv \text{Re } U \hat{\vec{x}}_s$ и $\hat{\vec{y}}_r \equiv \text{Re } U \hat{\vec{y}}_s$. Стоит отметить, что новые векторы $\hat{\vec{x}}_r$ и $\hat{\vec{y}}_r$ состоят только из комбинаций растянутых и сжатых квадратур, соответственно.

Примешаем к имеющемуся кластерному состоянию входные состояния, над которыми мы будем производить преобразования. Так как количество мод кластерного состояния и количество входных мод совпадает, то к каждой моде кластера мы должны примешать одну моду входного состояния. Эту процедуру будем выполнять с помощью симметричных светоделителей. Действие одного такого светоделителя на моды кластерного и входного состояния можно представить в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \hat{x}'_{in,k} + i\hat{y}'_{in,k} \\ \hat{X}'_k + i\hat{Y}'_k \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in,k} + i\hat{y}_{in,k} \\ \hat{X}_k + i\hat{Y}_k \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

где $\hat{X}_k$, $\hat{Y}_k$ и $\hat{X}'_k$, $\hat{Y}'_k$ – квадратуры k -ой моды кластерного состояния до и после светоделителя, соответственно; $\hat{x}_{in,k}$, $\hat{y}_{in,k}$ и $\hat{x}'_{in,k}$, $\hat{y}'_{in,k}$ – квадратуры k -ого входного состояния до и после светоделителя, соответственно. По аналогии с выражением (3.4), действие всех светоделителей на все моды можно представить в блочно-матричном виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{\vec{x}}'_{in} + i\hat{\vec{y}}'_{in} \\ \hat{\vec{X}}' + i\hat{\vec{Y}}' \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_m & I_m \\ I_m & -I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\vec{x}}_{in} + i\hat{\vec{y}}_{in} \\ \hat{\vec{X}} + i\hat{\vec{Y}} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_m & U \\ I_m & -U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\vec{x}}_{in} + i\hat{\vec{y}}_{in} \\ \hat{\vec{x}}_s + i\hat{\vec{y}}_s \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_m & (I_m + iA) \\ I_m & -(I_m + iA) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\vec{x}}_{in} + i\hat{\vec{y}}_{in} \\ \hat{\vec{x}}_r + i\hat{\vec{y}}_r \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\hat{\vec{X}}'$ и $\hat{\vec{Y}}'$ – векторы, состоящие из квадратур мод кластерного состояния после светоделителей, $\hat{\vec{x}}'_{in}$ и $\hat{\vec{y}}'_{in}$ – векторы, состоящие из квадратур входных состояний после светоделителей. В последней части данного равенства было использовано выражение (3.3).

На следующем этапе вычислений необходимо произвести измерения. Измерения будут проводиться с помощью балансных гомодинных детекторов над модами $\{\hat{x}'_{in,k} + i\hat{y}'_{in,k}\}_{k=1}^m$. В

общем случае квантовую амплитуду фототока, получаемую в результате гомодинного измерения k -ой моды можно записать в следующем виде

$$\hat{i}_k = \beta_0 (\cos \theta_k \hat{x}'_{in,k} + \sin \theta_k \hat{y}'_{in,k}), \quad (3.6)$$

где β_0 – это амплитуда локального осциллятора, используемого при данном детектировании, а θ_k – его фаза. Измерив m таких мод, мы получим систему уравнений, которую удобнее всего переписать в матричном виде

$$\hat{\vec{i}} = \beta_0 (\cos \Theta \hat{\vec{x}}'_{in} + \sin \Theta \hat{\vec{y}}'_{in}), \quad (3.7)$$

где $\Theta = \text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_m)$ – диагональная матрица, состоящая из фаз локальных осцилляторов, используемых при гомодинных измерениях, $\cos \Theta$ и $\sin \Theta$ – это функции от диагональных матриц. Воспользовавшись (3.5), мы можем переписать выражение (3.7) через квадратуры входных состояний и векторы $\hat{\vec{x}}_r, \hat{\vec{y}}_r$ следующим образом:

$$\frac{1}{\beta_0} \hat{\vec{i}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \Theta (\hat{\vec{x}}_{in} + \hat{\vec{x}}_r - A \hat{\vec{y}}_r) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \Theta (\hat{\vec{y}}_{in} + A \hat{\vec{x}}_r + \hat{\vec{y}}_r). \quad (3.8)$$

Из-за наличия связей (перепутанностей) в системе, измерение одних мод повлияет на другие. Чтобы отследить это влияние необходимо решить матричное уравнение (3.8) относительно вектора неизвестных квадратур $\hat{\vec{x}}_r$ и подставить это решение в выражение для неизмеренных квадратур:

$$\hat{\vec{X}}' + i \hat{\vec{Y}}' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\vec{x}}_{in} - \hat{\vec{x}}_r + A \hat{\vec{y}}_r) + \frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{\vec{y}}_{in} - A \hat{\vec{x}}_r - \hat{\vec{y}}_r). \quad (3.9)$$

Решение уравнения (3.8) записывается в виде

$$\hat{\vec{x}}_r = (\cos \Theta + \sin \Theta A)^{-1} \left(-\sin \Theta \hat{\vec{y}}_{in} - \cos \Theta \hat{\vec{x}}_{in} + (\cos \Theta A - \sin \Theta) \hat{\vec{y}}_r + \frac{\sqrt{2} \hat{\vec{i}}}{\beta_0} \right). \quad (3.10)$$

Подставив этот вектор в (3.9) и выписав отдельно квадратуры, мы получим следующие выражения:

$$\hat{X}_{out} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{x}_{in} + Q^{-1} \cos \Theta \hat{x}_{in} + Q^{-1} \sin \Theta \hat{y}_{in} + Q^{-1} \sin \Theta (I_m + A^2) \hat{y}_r \right) - \frac{1}{\beta_0} Q^{-1} \hat{i}, \quad (3.11)$$

$$\hat{Y}_{out} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{y}_{in} + A Q^{-1} \cos \Theta \hat{x}_{in} + A Q^{-1} \sin \Theta \hat{y}_{in} + (A Q^{-1} \sin \Theta - I_m) (I_m + A^2) \hat{y}_r \right) - \frac{1}{\beta_0} A Q^{-1} \hat{i}, \quad (3.12)$$

где было введено обозначение $Q = \cos \Theta + \sin \Theta A$. Отметим, что для получения окончательного решения в выражениях (3.11) и (3.12) необходимо также вычислить Q^{-1} . Это возможно сделать аналитически для определенных конфигураций кластерных состояний, однако в общем случае это невозможно. Несмотря на это, полученного неявного решения достаточно для ответа на вопрос о типе преобразований, реализуемых в данном случае.

Последние слагаемые в выражениях (3.11) и (3.12) отвечают за измеряемые фототоки. После проведения всех измерений операторы фототоков заменяются на вещественные числа, соответствующие результатам измерения. Другими словами после проведения измерений вектор операторов $\hat{i}$ превращается в числовой вектор вида $\vec{i}$. Учитывая это, можно представить полученные выражения в следующем матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out} \\ \hat{Y}_{out} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_m + Q^{-1} \cos \Theta & Q^{-1} \sin \Theta \\ AQ^{-1} \cos \Theta & I_m + AQ^{-1} \sin \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_m & 0_{m \times m} \\ A & -I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^{-1} \sin \Theta \\ I_m \end{pmatrix} (I_m + A^2) \hat{y}_r + \frac{1}{\beta_0} \begin{pmatrix} I_m \\ A \end{pmatrix} Q^{-1} \vec{i}, \quad (3.13)$$

где $0_{m \times m}$ – это нулевая матрица размерности $m \times m$. В каждом конкретном эксперименте мы знаем вектор $\vec{i}$, поскольку он состоит из результатов измерений. Мы также знаем конфигурацию используемого при вычислении графа (матрицу смежности A), а также фазы локальных осцилляторов гомодинных детекторов (матрицу Θ). Это означает, что последнее слагаемое в правой части выражения (3.13) является известной нам классической величиной. Соответственно, мы можем ее скомпенсировать с помощью смещения квадратур [113]. Более того, с помощью таких смещений мы можем не только компенсировать ненужные величины, но также добавлять нужные классические слагаемые. То есть мы можем получить следующее выражение:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out} \\ \hat{Y}_{out} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_m + Q^{-1} \cos \Theta & Q^{-1} \sin \Theta \\ AQ^{-1} \cos \Theta & I_m + AQ^{-1} \sin \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{pmatrix} \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_m & 0_{m \times m} \\ A & -I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^{-1} \sin \Theta \\ I_m \end{pmatrix} (I_m + A^2) \hat{y}_r, \quad (3.14)$$

где $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ – это произвольные векторы, которые полностью задаются нами. В дальнейшем, для упрощения записи, мы будем класть эти векторы равными нулю.

Важно отметить, что полученное нами преобразование квадратур отличается от идеализированного преобразования (3.1) наличием дополнительного слагаемого. Это слагаемое зависит от комбинаций сжатых $\hat{y}$ -квадратур квантовых осцилляторов, используемых при вычислении. При стремлении сжатия к бесконечности данное слагаемое стремиться к нулю, а выражение (3.14) стремится к (3.1). Это означает, что такое слагаемое вносит ошибки в результаты вычислений, связанные с использованием реальных физических систем с конечным сжатием. Более того, чем больше физических систем используется для реализации преобразования, тем больше будет ошибка в результатах. Далее в этой главе (в разделе 3.5) мы будем учитывать наличие таких ошибок при поиске конфигураций кластеров пригодных для универсальных гауссовых вычислений.

Из выражения (3.14) видно, что матрица преобразования входных квадратур в выходные (первое слагаемое в правой части равенства) зависит лишь от конфигурации графа кластерного состояния (матрицы смежности A) и от фаз локальных осцилляторов (матрицы Θ),

которые мы выбираем при гомодинных измерениях. Кажется, что второе слагаемое зависит еще и от способа генерации кластерного состояния ($\hat{y}_r = \text{Re } U \hat{y}_s = (I + A^2)^{-1/2} Q \hat{y}_s$), поскольку там присутствует произвольная ортогональная матрица Q , которая и определяет способ генерации (2.12). Однако, в Приложении А мы показали, что при использовании одинаково сжатых статистически независимых осцилляторов среднеквадратичные флуктуации этого вектора не будут зависеть от матрицы Q . Другими словами, при однонаправленных квантовых вычислениях на непрерывных переменных, на результаты вычислений (преобразование и среднеквадратичные флуктуации ошибок) влияет только конфигурация кластерного состояния, и не влияет способ его приготовления.

3.2.1 Квантовые преобразования, реализуемые в данной схеме вычислений

Давайте перейдем теперь к преобразованиям, которые могут быть реализованы с помощью данной схемы вычислений. Как уже неоднократно отмечалось, наша основная цель при однонаправленных вычислениях – это реализация универсальных гауссовых преобразований. Для этих целей необходимо продемонстрировать реализуемость двух типов преобразований: универсального одномодового и произвольного двухмодового (мы выберем в качестве последнего преобразование CZ). Давайте рассмотрим возможность реализации данных преобразований в конфигурации, описанной выше.

Одномодовое преобразование

Реализуемость универсального одномодового преобразования означает, что невозможно указать одномодовое преобразование, которое невыполнимо в данной схеме. Мы явно укажем на невыполнимое преобразование, что будет означать отсутствие универсальности.

Давайте рассмотрим возможность реализации преобразования Фурье в предложенной схеме квантовых вычислений. Для удобства будем обсуждать возможность реализации m -мерного преобразования Фурье, которое определяется следующим выражением:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out} \\ \hat{Y}_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{m \times m} & -I_m \\ I_m & \mathbb{O}_{m \times m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Для реализации этого преобразования нужно потребовать выполнение равенства

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_m + Q^{-1} \cos \Theta & Q^{-1} \sin \Theta \\ A Q^{-1} \cos \Theta & I_m + A Q^{-1} \sin \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{m \times m} & -I_m \\ I_m & \mathbb{O}_{m \times m} \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Чтобы это равенство выполнялось необходимо, чтобы $I = -Q^{-1} \cos \Theta$. Из этого вытекает, что $\sin \Theta A = -2 \cos \Theta$. Это равенство выполняется, если матрица A – диагональна. Диагональной матрица смежности может быть только в том случае, если она нулевая. Однако,

в этом случае не выполняется условие $AQ^{-1} \cos \Theta = I_m$. Полученное противоречие доказывает, что невозможно реализовать m -мерное преобразование Фурье в предложенной схеме вычислений.

Тот факт, что мы не можем выполнить одно из одномодовых преобразований (преобразование Фурье), означает, что в данной схеме вычислений не могут быть реализованы универсальные одномодовые гауссовы преобразования.

В принципе, доказав неуниверсальность для одномодовых преобразований, мы могли бы говорить об отсутствии универсальности данной схемы к гауссовым преобразованиям в целом, и не рассматривать двухмодовые операции. Однако, для полноты картины, выясним свойства двухмодовых операций в рассматриваемой конфигурации.

Двухмодовое преобразование

Давайте теперь рассмотрим реализацию двухмодового преобразования CZ . Также, как и раньше, для удобства рассмотрим $2m$ -модовый аналог данного преобразования, который переводит входные квадратуры в выходные по следующему правилу:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out} \\ \hat{Y}_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & \mathbb{O}_{m \times m} \\ W & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} \equiv CZ[W] \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

где W – произвольная матрица с нулевой главной диагональю. Если для реализации данного преобразования мы используем выражение (3.14), мы получаем набор условий

$$Q^{-1} \sin \Theta = \mathbb{O}_{m \times m}, \quad (3.18)$$

$$I_m + Q^{-1} \cos \Theta = \sqrt{2} I_m, \quad (3.19)$$

$$AQ^{-1} \cos \Theta = \sqrt{2} W, \quad (3.20)$$

$$I_m + AQ^{-1} \sin \Theta = \sqrt{2} I_m. \quad (3.21)$$

Из первого условия следует, что $\sin \Theta = \mathbb{O}_{m \times m}$. Однако, в этом случае не выполняется второе условие. Таким образом, в данной схеме вычислений нельзя реализовать чистое двухмодовое преобразование CZ .

Хоть в данной схеме вычислений и нельзя выполнить чистое преобразование CZ , но она позволяет реализовать схожее преобразование. Положим $\sin \Theta_{in} = \mathbb{O}_{m \times m}$, тогда выражение (3.14) примет вид:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out} \\ \hat{Y}_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} I_m & \mathbb{O}_{m \times m} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} A & \frac{1}{\sqrt{2}} I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{m \times m} \\ I_m \end{pmatrix} (I + A^2) \hat{y}_r. \quad (3.22)$$

Данное выражение можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out} \\ \hat{Y}_{out} \end{pmatrix} = S \left(-\frac{\ln 2}{2} I_m \right) CZ[A] \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{m \times m} \\ I_m \end{pmatrix} (I + A^2) \hat{y}_r, \quad (3.23)$$

где многомодовая матрица сжатия S определяется как:

$$S(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \exp(-\mathbf{r}) & \mathbf{O}_{m \times m} \\ \mathbf{O}_{m \times m} & \exp(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

при $\mathbf{r} = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_m)$. То есть, рассматриваемая схема позволяет выполнить преобразование CZ одновременно с преобразованием сжатия. Как было показано в первой главе, и преобразование CZ и преобразование сжатия принадлежат к группе генераторов гауссовых преобразований. Это означает, что, если к данной схеме вычислений добавить схему, реализующую универсальные одномодовые преобразования, то такая составная система может уже рассматриваться как универсальный гауссов преобразователь. Более того, поскольку в рассматриваемом примере мы использовали минимально возможное число узлов кластера, то такая схема является хорошим претендентом для уменьшения ошибок вычислений. Мы запомним этот результат как полезный для построения вычислительных схем в четвертой главе диссертации.

3.3 Случай вычислений, когда входные состояния примешиваются к выходным ($n > m$)

В предыдущем разделе мы рассмотрели однонаправленные квантовые вычисления на кластерном состоянии с минимальным числом узлов $n = m$. Такое состояние оказалось не пригодно для реализации универсальных гауссовых вычислений. Давайте теперь попробуем увеличить число узлов в таком кластере и посмотреть, как это отразится на вычислениях. При этом будем предполагать, что m входных мод примешиваются к m неизмеряемым модам кластерного состояния (выходным модам).

Как и раньше, квадратуры кластерного состояния зададим с помощью квадратур сжатых осцилляторов и преобразования Боголюбова (2.9).

$$\hat{\vec{X}} + i\hat{\vec{Y}} = (I_n + iA) \text{Re } U \left(\hat{\vec{x}}_s + i\hat{\vec{y}}_s \right) \equiv (I_n + iA) \left(\hat{\vec{x}}_r + i\hat{\vec{y}}_r \right), \quad (3.25)$$

Давайте разобьем этот вектор на две составляющие: измеряемые и неизмеряемые квадратуры. Представим общее число узлов кластера как $n = m + l$, при $l > 0$. В результате разбиения мы получим:

$$\hat{\vec{X}} + i\hat{\vec{Y}} = \begin{pmatrix} \hat{\vec{X}}_m + i\hat{\vec{Y}}_m \\ \hat{\vec{X}}_l + i\hat{\vec{Y}}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1' + iA_1 \\ I_2' + iA_2 \end{pmatrix} \left(\hat{\vec{x}}_r + i\hat{\vec{y}}_r \right), \quad (3.26)$$

где $\hat{\vec{X}}_m + i\hat{\vec{Y}}_m$ – это моды кластерного состояния, к которым будут примешиваться входные моды; $\hat{\vec{X}}_l + i\hat{\vec{Y}}_l$ – это измеряемые моды кластерного состояния. Для записи этого выражения мы воспользовались блочным разбиением матриц A и I_n в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{pmatrix}, \quad I_n = \begin{pmatrix} I_1' \\ I_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & \mathbf{O}_{m \times l} \\ \mathbf{O}_{l \times m} & I_l \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

где $\{A_1, I'_1\} \subset M^{m \times (m+l)}$, $\{A_2, I'_2\} \subset M^{l \times (m+l)}$, $\{A_{11}, I_m\} \subset M^{m \times m}$, $\{A_{22}, I_l\} \subset M^{l \times l}$, $\{A_{12}, O_{m \times l}\} \subset M^{m \times l}$, $O_{l \times m} \in M^{l \times m}$, $O_{k \times t}$ – это нулевые матрицы размерности $k \times t$. Здесь и далее под $M^{q \times p}$ мы понимаем множество матриц размерности $q \times p$ над полем вещественных чисел.

Примешаем с помощью симметричных светоделителей к m первым модам кластерного состояния m входных квантовых состояний. Квадратуры полей на выходе светоделителей можно записать следующим образом:

$$\hat{x}'_{in} + i\hat{y}'_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{x}_{in} + I'_1 \hat{x}_r - A_1 \hat{y}_r \right) + \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\hat{y}_{in} + I'_1 \hat{y}_r + A_1 \hat{x}_r \right), \quad (3.28)$$

$$\hat{X}'_m + i\hat{Y}'_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{x}_{in} - I'_1 \hat{x}_r + A_1 \hat{y}_r \right) + \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\hat{y}_{in} - I'_1 \hat{y}_r - A_1 \hat{x}_r \right). \quad (3.29)$$

где $\hat{X}'_m$ и $\hat{Y}'_m$ – векторы, состоящие из квадратур первых m мод кластерного состояния после светоделителей, $\hat{x}'_{in}$ и $\hat{y}'_{in}$ – векторы, состоящие из квадратур входных состояний после светоделителей. Важно отметить, что кластерное состояние не зависит от нумераций мод, а зависит лишь от связей между этими модами. Таким образом, мы можем всегда нумеровать моды так, чтобы все моды, которые связываются с входными имели номера от 1 до m .

На следующем этапе вычислений необходимо произвести измерения над всеми имеющимися в системе модами, кроме выходных. Напомним, что в данном разделе мы рассматриваем случай, когда входные моды примешиваются сразу к выходным (не измеряемым), поэтому выходными модами будем считать моды (3.29). Все измерения будут проводиться с помощью балансных гомодинных детекторов. В общем случае квантовые амплитуды фототоков, получаемые в результате гомодинных измерений имеют вид:

$$\begin{cases} \cos \Theta_{in} \left(\hat{x}_{in} + I'_1 \hat{x}_r - A_1 \hat{y}_r \right) + \sin \Theta_{in} \left(\hat{y}_{in} + I'_1 \hat{y}_r + A_1 \hat{x}_r \right) = \frac{\sqrt{2}}{\beta_0} \hat{i}_{in}, \\ \cos \Theta_1 \left(I'_2 \hat{x}_r - A_2 \hat{y}_r \right) + \sin \Theta_1 \left(I'_2 \hat{y}_r + A_2 \hat{x}_r \right) = \frac{1}{\beta_0} \hat{i}, \end{cases} \quad (3.30)$$

где $\beta_0 \in \mathbb{R}$ – это амплитуда локальных осцилляторов гомодинных детекторов, $\Theta_{in} = \text{diag}(\theta_{in,1}, \theta_{in,2}, \dots, \theta_{in,m})$ и $\Theta_1 = \text{diag}(\theta_{1,1}, \theta_{1,2}, \dots, \theta_{1,l})$ – диагональные матрицы, состоящие из фаз локальных осцилляторов используемых при гомодинном детектировании каждой моды. Воспользовавшись разбиением (3.27), мы можем переписать данную систему в блочно-матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \cos \Theta_{in} + \sin \Theta_{in} A_{11} & \sin \Theta_{in} A_{12} \\ \sin \Theta_1 A_{12}^T & \cos \Theta_1 + \sin \Theta_1 A_{22} \end{pmatrix} \hat{x}_r = - \begin{pmatrix} \cos \Theta_{in} \hat{x}_{in} + \sin \Theta_{in} \hat{y}_{in} \\ O_{m \times 1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \Theta_{in} A_{11} - \sin \Theta_{in} & \cos \Theta_{in} A_{12} \\ \cos \Theta_1 A_{12}^T & \cos \Theta_1 A_{22} - \sin \Theta_1 \end{pmatrix} \hat{y}_r. \quad (3.31)$$

Здесь мы опустили члены, связанные с квантовыми фототоками имея ввиду измерительную процедуру и процедуру смещения, описанные выше в разделе 3.2.

Перейдем теперь к решению уравнения (3.31) относительно вектора неизвестных переменных $\hat{\vec{x}}_r$. Для решения нам необходимо обратить матрицу

$$M = \begin{pmatrix} \cos \Theta_{in} + \sin \Theta_{in} A_{11} & \sin \Theta_{in} A_{12} \\ \sin \Theta_1 A_{12}^T & \cos \Theta_1 + \sin \Theta_1 A_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Очевидно, что матрица M будет обратима, если обе диагональные блочные матрицы одновременно обратимы. Но оказывается, что можно решить задачу и в более общем случае, когда обратимой является только одна из двух блочных матриц, стоящих на диагонали M . Мы построим оба решения. Отметим, что решения совпадают в случае одновременной обратимости обеих блочных матриц.

Пусть точно известно, что обратима блочная матрица $\cos \Theta_{in} + \sin \Theta_{in} A_{11}$, тогда воспользуемся первой формулой Фробениуса (см. Приложение В, формулу (B.1)) и получим M^{-1} . Далее, подставляя полученную M^{-1} в выражение (3.31), найдем вектор $\hat{\vec{x}}_r$. Наконец, подставляя данный вектор в (3.29), получим окончательное выражение, для выходных квадратур:

$$\begin{pmatrix} \hat{\vec{X}}_{out} \\ \hat{\vec{Y}}_{out} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_m + LQ^{-1} \cos \Theta_{in} & LQ^{-1} \sin \Theta_{in} \\ VQ^{-1} \cos \Theta_{in} & I_m + VQ^{-1} \sin \Theta_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\vec{x}}_{in} \\ \hat{\vec{y}}_{in} \end{pmatrix} + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_m & O_{m \times m} \\ A_{11} & -I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^{-1} \sin \Theta \\ I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m + A_{11}^2 + A_{12} M_{e1} & A_{11} A_{12} + A_{12} M_{e2} \end{pmatrix} \hat{\vec{y}}_r, \quad (3.33)$$

где были введены следующие обозначения:

$$Q = \cos \Theta_{in} + \sin \Theta_{in} A_{11}, \quad (3.34)$$

$$H = \cos \Theta_1 + \sin \Theta_1 (A_{22} - A_{12}^T Q^{-1} \sin \Theta_{in} A_{12}), \quad (3.35)$$

$$L = I_m + Q^{-1} \sin \Theta_{in} A_{12} H^{-1} \sin \Theta_1 A_{12}^T, \quad (3.36)$$

$$V = A_{11} L - A_{12} H^{-1} \sin \Theta_1 A_{12}^T, \quad (3.37)$$

$$M_{e1} = H^{-1} (\cos \Theta_1 A_{12}^T - \sin \Theta_1 A_{12}^T Q^{-1} (\cos \Theta_{in} A_{11} - \sin \Theta_{in})), \quad (3.38)$$

$$M_{e2} = H^{-1} (-\sin \Theta_1 A_{12}^T Q^{-1} \cos \Theta_{in} A_{12} + \cos \Theta_1 A_{22} - \sin \Theta_1). \quad (3.39)$$

Пусть теперь обратима блочная матрица $\cos \Theta_1 + \sin \Theta_1 A_{22}$, тогда воспользуемся другой формулой Фробениуса (см. Приложение В, формулу (B.2)) для получения M^{-1} . Действуя также, как и в прошлом случае, мы получим выражение, для связи входных и выходных квадратур:

$$\begin{pmatrix} \hat{\vec{X}}_{out} \\ \hat{\vec{Y}}_{out} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_m + K^{-1} \cos \Theta_{in} & K^{-1} \sin \Theta_{in} \\ PK^{-1} \cos \Theta_{in} & I_m + PK^{-1} \sin \Theta_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\vec{x}}_{in} \\ \hat{\vec{y}}_{in} \end{pmatrix} + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_m & O_{m \times m} \\ P & -I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{-1} \sin \Theta_{in} \\ I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m + A_{11}^2 + A_{12} M_{e3} & A_{11} A_{12} + A_{12} M_{e4} \end{pmatrix} \hat{\vec{y}}_r, \quad (3.40)$$

где

$$K = \cos \Theta_{in} + \sin \Theta_{in} P, \quad (3.41)$$

$$P = A_{11} - A_{12} D^{-1} \sin \Theta_1 A_{12}^T, \quad (3.42)$$

$$D = \cos \Theta_1 + \sin \Theta_1 A_{22}, \quad (3.43)$$

$$M_{e3} = D^{-1} (\cos \Theta_1 A_{12}^T - \sin \Theta_1 A_{12}^T A_{11}), \quad (3.44)$$

$$M_{e4} = D^{-1} (\cos \Theta_1 A_{22} - \sin \Theta_1 (A_{12}^T A_{12} + I_l)). \quad (3.45)$$

Хотя выражения (3.33) и (3.40) и выглядят громоздко, из них видно, что матрицы преобразований входных квадратур в выходные (первые слагаемые в правых частях равенств) зависят лишь от конфигурации графа кластерного состояния (матрицы смежности A) и от фаз локальных осцилляторов (матрицы Θ_{in}), которые мы выбираем при гомодинных детектированиях.

3.3.1 Квантовые преобразования, реализуемые в данной схеме вычислений

Давайте воспользуемся неявными решениями (3.33) и (3.40) для выявления преобразований, которые могут быть реализованы в данной схеме вычислений.

Одномодовое преобразование

По аналогии с прошлым случаем рассмотрим возможность реализации универсальных одномодовых преобразований на примере m -мерного преобразования Фурье (3.15). В случае вычислений, задаваемых выражением (3.33) мы получим преобразование Фурье при выполнении следующих соотношений

$$LQ^{-1} \cos \Theta_{in} = -I_m, \quad (3.46)$$

$$LQ^{-1} \sin \Theta_{in} = -\sqrt{2}I_m, \quad (3.47)$$

$$VQ^{-1} \cos \Theta_{in} = \sqrt{2}I_m, \quad (3.48)$$

$$VQ^{-1} \sin \Theta_{in} = -I_m. \quad (3.49)$$

Из первого и второго выражения мы получаем, что для реализации преобразований Фурье необходимо, чтобы $\sqrt{2} \cos \Theta_{in} = \sin \Theta_{in}$. Учитывая это, два других выражения переписываются в виде $VQ^{-1} \cos \Theta_{in} = \sqrt{2}I_m$ и $VQ^{-1} \cos \Theta_{in} = -1/\sqrt{2}I_m$. Полученное противоречие означает, что в данном случае преобразование Фурье реализовать невозможно.

Мы доказали невозможность выполнения преобразования Фурье в случае вычислений, задаваемых выражением (3.33). Для вычислений, задаваемых выражением (3.40), доказательство выглядит аналогично. Тот факт, что мы не можем реализовывать одно из одномодовых преобразований (преобразование Фурье), означает, что в данной схеме вычислений не могут быть реализованы универсальные одномодовые гауссовы преобразования.

Двухмодовое преобразование

Давайте теперь, для полноты картины, рассмотрим реализацию двухмодового преобразования CZ , которое определяется соотношением (3.17). Если для реализации данного преобразования мы используем выражение (3.33), мы получаем набор условий

$$LQ^{-1} \sin \Theta_{in} = \mathbb{O}_{m \times m}, \quad (3.50)$$

$$VQ^{-1} \cos \Theta_{in} = \sqrt{2}W, \quad (3.51)$$

$$LQ^{-1} \cos \Theta_{in} = (\sqrt{2} - 1)I_m, \quad (3.52)$$

$$VQ^{-1} \sin \Theta_{in} = (\sqrt{2} - 1)I_m. \quad (3.53)$$

Из (3.50) мы получаем, что или $\sin \Theta_{in} = \mathbb{O}_{m \times m}$ или $L = \mathbb{O}_{m \times m}$. Если верно первое, то не выполняется равенство (3.53). В случае, когда $L = \mathbb{O}_{m \times m}$, перестает выполняться равенство (3.52). Полученное противоречие говорит о невозможности реализовать чистое преобразование CZ . Доказательство для случая использования выражения (3.40) аналогично.

В данной схеме вычислений можно реализовать преобразование типа CZ . Для этого, как и в случае вычислений с $n = m$, нужно положить $\sin \Theta_{in} = \mathbb{O}_{m \times m}$. При этом выражения (3.33) и (3.40) совпадут и примут вид:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out} \\ \hat{Y}_{out} \end{pmatrix} = S \left(-\frac{\ln 2}{2} I_m \right) CZ[P] \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{m \times m} \\ I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m + A_{11}^2 + A_{12}M_{e3} & A_{11}A_{12} + A_{12}M_{e4} \end{pmatrix} \hat{y}_r. \quad (3.54)$$

Данное преобразование сводится к (3.23) при несвязности первых m мод кластерного состояния с остальными модами кластера (т. е. при $A_{12} = \mathbb{O}_{m \times m}$)

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out} \\ \hat{Y}_{out} \end{pmatrix} = S \left(-\frac{\ln 2}{2} I_m \right) CZ[A_{11}] \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{m \times m} \\ I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (I_m + A_{11}^2) & \mathbb{O}_{m \times l} \end{pmatrix} \hat{y}_r. \quad (3.55)$$

В этом разделе мы показали, что вычисления при которых входные состояния примешиваются сразу к выходным, не являются универсальными. С их помощью невозможно реализовать ни универсальные одномодовые преобразования, ни чистое преобразование CZ . С помощью таких вычислений можно реализовывать лишь преобразование типа CZ . При этом для реализации такого преобразования лучше использовать схему с кластерным состоянием с числом узлов равным числу входных мод ($n = m$), поскольку в этом случае мы используем меньшее число физических систем, а значит и ошибка вычислений будет меньше.

3.4 Случай вычислений, когда входные состояния примешиваются к измеряемым кластерным узлам ($n \leq 2m$)

В прошлом разделе нами был исследован случай вычислений, когда входные моды примешивались с помощью светоделителей к выходным модам. Здесь и далее будем рассматривать обратную ситуацию, при которой входные моды примешиваются к промежуточным кластерным модам, которые впоследствии будут измерены. Как мы говорили в разделе 3.1, разделим все случаи таких вычислений на два: $n \leq 2m$ и $n > 2m$. В данном разделе начнем наше рассмотрение со случая, когда число кластерных мод ровно в два раза больше числа входных мод ($n = 2m$). Давайте разобьем вектор квадратур кластерного состояния на две составляющие: квадратуры, к которым примешиваются входные состояния и выходные квадратуры.

$$\hat{X} + i\hat{Y} = (I_n + iA) \begin{pmatrix} \hat{x}_r + i\hat{y}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I'_1 + iA_1 \\ I'_2 + iA_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_r + i\hat{y}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{X}_1 + i\hat{Y}_1 \\ \hat{X}_2 + i\hat{Y}_2 \end{pmatrix}, \quad (3.56)$$

где $\hat{X}_1 + i\hat{Y}_1$ – это моды кластерного состояния, к которым примешиваются входные моды; $\hat{X}_2 + i\hat{Y}_2$ – это моды, которые по результатам вычислений будут выходными; $\{I'_1 = \begin{pmatrix} I_m & 0_{m \times m} \end{pmatrix}, I'_2 = \begin{pmatrix} 0_{m \times m} & I_m \end{pmatrix}\} \subset M^{m \times 2m}$ – блочные матрицы, составляющие единичную матрицу $I_n \in M^{2m \times 2m}$; а $\{A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} A_{12}^T & A_{22} \end{pmatrix}\} \subset M^{m \times 2m}$ – блоки матрицы смежности $A \in M^{2m \times 2m}$.

Как и в прошлом случае, входные моды, задаваемые вектором $\hat{x}_{in} + i\hat{y}_{in}$, будем примешивать к первым m модам кластерного состояния с помощью симметричных светоделителей. Моды, полученные после светоделителей, измерим с помощью балансных гомодинных детекторов. Результат таких измерений можно записать в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} \cos \Theta_{in} \left(\hat{x}_{in} + I'_1 \hat{x}_r - A_1 \hat{y}_r \right) + \sin \Theta_{in} \left(\hat{y}_{in} + A_1 \hat{x}_r + I'_1 \hat{y}_r \right) = \frac{\sqrt{2}}{\beta_0} \hat{i}_{in} \\ \cos \Theta \left(\hat{x}_{in} - I'_1 \hat{x}_r + A_1 \hat{y}_r \right) + \sin \Theta \left(\hat{y}_{in} - A_1 \hat{x}_r - I'_1 \hat{y}_r \right) = \frac{\sqrt{2}}{\beta_0} \hat{i} \end{cases}, \quad (3.57)$$

где $\Theta_{in} = \text{diag}(\theta_{in,1}, \dots, \theta_{in,m})$, $\Theta = \text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_m)$ – диагональные матрицы состоящие из фаз локальных осцилляторов, β_0 – амплитуды локальных осцилляторов. Решая данную систему уравнений относительно вектора неизвестных квадратур $\hat{x}_r$ и подставляя полученное решение в неизмеренные кластерные моды $\hat{X}_2 + i\hat{Y}_2$, мы получим связь вектора выходных квадратур с входными (см. Приложение C):

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out} \\ \hat{Y}_{out} \end{pmatrix} = CZ[A_{22}] \begin{pmatrix} -A_{12}^{-1} & 0_{m \times m} \\ 0_{m \times m} & -A_{12}^T \end{pmatrix} R\left(-\frac{\pi}{2}I_m\right) CZ[A_{11}] R\left(\frac{\pi}{2}I_m\right) R\left(-\frac{1}{2}\Theta_+\right) * \\ * S\left(\ln\left[\tan\frac{1}{2}\Theta_-\right]\right) R\left(-\frac{1}{2}\Theta_+\right) \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -A_{12}^{-1} & 0_{m \times m} \\ -A_{22}A_{12}^{-1} & I_m \end{pmatrix} (A^2 + I_n) \hat{y}_r, \quad (3.58)$$

где $\Theta_{\pm} = \Theta \pm \Theta_{in}$, $CZ[W]$ – матрица преобразования CZ , задаваемая выражением (3.17), $S(r)$ – матрица многомодового преобразования сжатия (3.24), матрица $R(\Theta)$ – многомодовая матрица поворота:

$$R(\Theta) = \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}. \quad (3.59)$$

В выражении (3.58) мы опустили члены, связанные с амплитудами квантовых фототоков по причинам, которые были описаны выше.

3.4.1 Квантовые вычисления, реализуемые в данной схеме вычислений

Рассмотрим теперь преобразования, которые могут быть реализованы в данной схеме вычислений.

Преобразование CZ

Из выражения (3.58) мы видим, что, если положить $A_{11} = \mathbb{O}_{m \times m}$, $\Theta_+ = \mathbb{O}_{m \times m}$, $\Theta_- = \frac{\pi}{2}I_m$ и $A_{12} = -I_m$, то мы получим чистое m -модовое преобразование CZ

$$\begin{pmatrix} \hat{\tilde{X}}_{out} \\ \hat{\tilde{Y}}_{out} \end{pmatrix} = CZ[A_{22}] \begin{pmatrix} \hat{\tilde{x}}_{in} \\ \hat{\tilde{y}}_{in} \end{pmatrix} + CZ[A_{22}] (A^2 + I_n) \hat{\tilde{y}}_r, \quad (3.60)$$

где матрица $CZ[A_{22}]$ зависит от блочной матрицы A_{22} и определяется выражением (3.17). Второе слагаемое в данном выражении отвечает за ошибку вычислений. Подробнее величина этого слагаемого будет проанализирована в следующей главе диссертации.

Для реализации двухмодового ($m = 2$) преобразования CZ мы можем использовать кластерное состояние, граф которого задается следующей матрицей смежности

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right). \quad (3.61)$$

На Рис. 3.2 представлен пример схемы реализации преобразования CZ на основе кластерного состояния, описываемого таким графом.

Универсальные одномодовые преобразования

Рассмотрим теперь возможность реализации универсального одномодового преобразования ($m = 1$). Теорема о редукции Блоха-Мессиа [114] утверждает, что матрицу универсального одномодового преобразования можно представить в виде произведения $R(\varphi_2) S(r) R(\varphi_1)$. В нашем случае, при условии $A_{22} = A_{11} = 0$ и $A_{12} = -1$ мы получим:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out} \\ \hat{Y}_{out} \end{pmatrix} = R\left(-\frac{1}{2}\Theta_+\right) S\left(\ln\left[\tan\frac{1}{2}\Theta_-\right]\right) R\left(-\frac{1}{2}\Theta_+\right) \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \sqrt{2} \begin{pmatrix} \hat{y}_{s,1} \\ \hat{y}_{s,2} \end{pmatrix}, \quad (3.63)$$

где $\hat{y}_{s,1}$ и $\hat{y}_{s,2}$ — это квадратуры сжатых осцилляторов, используемых при генерации кластера. Мы видим, что это преобразование не является универсальным, поскольку углы у матриц поворота совпадают.

Таким образом, в данной схеме можно реализовать преобразование CZ , но нельзя получить универсальное одномодовое преобразование. Однако, мы видим, что в предложенной схеме вычислений можно реализовывать все генераторы группы универсальных гауссовых преобразований ($R(\varphi)$ и $S(r)$). Это означает, что универсальность вычислений могла бы быть достигнута за счет многократного применения вычислительной процедуры, что, конечно, требует уже большего числа кластерных мод.

Поскольку $n = 2m$ мод кластера оказалось недостаточно для выполнения универсальных вычислений, то можно заведомо утверждать, что и случай $n < 2m$ не приведет к положительному результату, и не требует дополнительного рассмотрения. Более того, поскольку число выходных (неизмеряемых) мод должно остаться равным m , в этом случае нам будет не хватать измеряемых мод кластера, и мы будем вынуждены привязывать к некоторым кластерным модам более одной входной моды. Это будет приводить к потере информации от некоторых входных мод, и к невозможности проведения однонаправленных вычислений. С математической точки зрения такой результат получается из-за наличия линейно зависимых строк в системе уравнений на $\hat{x}_r$. Таким образом, можно говорить о условии на связь входных мод с кластерными: "каждая входная мода должна связываться лишь с одной кластерной модой".

3.5 Случай вычислений, когда входные состояния привязываются к измеряемым узлам кластера ($n > 2m$)

Рассмотрим теперь случай, когда число узлов в кластерном состоянии более чем в два раза превосходит число входных мод, т. е. $n = 2m + l$, при $l \geq 0$. В этом случае вектор, состоящий из квадратур кластерного состояния будет задаваться следующим образом:

$$\hat{\vec{X}} + i\hat{\vec{Y}} = \begin{pmatrix} \hat{X}_1 + i\hat{Y}_1 \\ \hat{X}_2 + i\hat{Y}_2 \\ \hat{X}_3 + i\hat{Y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I'_1 + iA_1 \\ I'_2 + iA_2 \\ I'_3 + iA_3 \end{pmatrix} (\hat{x}_r + i\hat{y}_r), \quad (3.64)$$

где $I'_1 = \begin{pmatrix} I_m & \mathbf{0}_{m \times m} & \mathbf{0}_{m \times l} \end{pmatrix}$, $I'_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{m \times m} & I_m & \mathbf{0}_{m \times l} \end{pmatrix}$, $I'_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{l \times m} & \mathbf{0}_{l \times m} & I_l \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} A_{12}^T & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} A_{13}^T & A_{23}^T & A_{33} \end{pmatrix}$ и $\{A_{11}, A_{12}, A_{22}\} \subset M^{m \times m}$, $\{A_{23}, A_{13}\} \subset M^{m \times l}$, $A_{33} \in M^{l \times l}$. Поскольку кластерное состояние не зависит от нумерации мод, мы выбрали здесь порядок мод такой, что квадратуры с индексами 1 и 3 являются измеряемыми, а квадратуры с индексом 2 – выходными.

Смешаем на светоделителях моды $\hat{X}_1 + i\hat{Y}_1$ с входными модами $\hat{x}_{in} + i\hat{y}_{in}$ и произведем измерения полученных мод и мод $\hat{X}_3 + i\hat{Y}_3$. В результате можно записать операторы квантовых фототоков в виде:

$$\begin{cases} \cos \Theta_1 \left(\hat{x}_{in} + I'_1 \hat{x}_r - A_1 \hat{y}_r \right) + \sin \Theta_1 \left(\hat{y}_{in} + I'_1 \hat{y}_r + A_1 \hat{x}_r \right) = \frac{\sqrt{2}}{\beta_0} \hat{i}_1 \\ \cos \Theta_2 \left(\hat{x}_{in} - I'_1 \hat{x}_r + A_1 \hat{y}_r \right) + \sin \Theta_2 \left(\hat{y}_{in} - I'_1 \hat{y}_r - A_1 \hat{x}_r \right) = \frac{\sqrt{2}}{\beta_0} \hat{i}_2 \\ \cos \Theta_3 \left(I'_3 \hat{x}_r - A_3 \hat{y}_r \right) + \sin \Theta_3 \left(I'_3 \hat{y}_r + A_3 \hat{x}_r \right) = \frac{1}{\beta_0} \hat{i}_3 \end{cases} \quad (3.65)$$

Для решения данной системы относительно неизвестных переменных $\hat{x}_r$ нам необходимо обратить матрицу

$$M = \begin{pmatrix} \cos \Theta_1 + \sin \Theta_1 A_{11} & \sin \Theta_1 A_{12} & \sin \Theta_1 A_{13} \\ -\cos \Theta_2 - \sin \Theta_2 A_{11} & -\sin \Theta_2 A_{12} & -\sin \Theta_2 A_{13} \\ \sin \Theta_3 A_{13}^T & \sin \Theta_3 A_{23}^T & \cos \Theta_3 + \sin \Theta_3 A_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{Q} & \tilde{T} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix}, \quad (3.66)$$

где нами были введены следующие обозначения

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \cos \Theta_1 + \sin \Theta_1 A_{11} & \sin \Theta_1 A_{12} \\ -\cos \Theta_2 - \sin \Theta_2 A_{11} & -\sin \Theta_2 A_{12} \end{pmatrix} \in M^{2m \times 2m}, \quad \tilde{T} = \begin{pmatrix} \sin \Theta_1 A_{13} \\ -\sin \Theta_2 A_{13} \end{pmatrix} \in M^{2m \times l},$$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} \sin \Theta_3 A_{13}^T & \sin \Theta_3 A_{23}^T \end{pmatrix} \in M^{l \times 2m}, \quad \tilde{D} = \cos \Theta_3 + \sin \Theta_3 A_{33} \in M^{l \times l}.$$

Как и раньше в зависимости от обратимости блоков $\tilde{Q}$ и $\tilde{D}$, существует две формулы обращения.

Пусть блочная матрица $\tilde{Q}$ является обратимой, тогда воспользуемся соответствующей формулой Фробениуса (B.1), обратим матрицу M и найдем вектор квадратур $\hat{x}_r$, который подставим в выходные квадратуры $\hat{X}_2 + i\hat{Y}_2$. В результате, мы можем записать окончательную связь выходных квадратур с входными в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out} \\ \hat{Y}_{out} \end{pmatrix} = CZ[A_{22}] \begin{pmatrix} -(K_1 A_{23}^T + I_m) A_{12}^{-1} & K_1 K_2 + A_{12}^{-1} A_{11} \\ A_{23} \tilde{H}^{-1} \sin \Theta_3 A_{23}^T A_{12}^{-1} & -A_{12}^T - A_{23} \tilde{H}^{-1} \sin \Theta_3 K_2 \end{pmatrix} * \\ * R \left(-\frac{1}{2} \Theta_+ \right) S \left(\ln \left[\tan \frac{1}{2} \Theta_- \right] \right) R \left(-\frac{1}{2} \Theta_+ \right) \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + E \hat{y}_r, \quad (3.67)$$

где

$$\tilde{H} = \cos \Theta_3 + \sin \Theta_3 (A_{33} - A_{23}^T A_{12}^{-1} A_{13}), \quad (3.68)$$

$$K_1 = A_{12}^{-1} A_{13} H_1^{-1} \sin \Theta_3, \quad (3.69)$$

$$K_2 = A_{23}^T A_{12}^{-1} A_{11} - A_{13}^T, \quad (3.70)$$

$\Theta_{\pm} = \Theta_1 \pm \Theta_2$, матрицы $CZ[W]$, $S(r)$ и $R(\Theta)$ определяются выражениями (3.17), (3.24) и (3.59), соответственно. Матрица ошибок E выписана в Приложении D.

Пусть теперь обратима матрица $\tilde{D}$, тогда воспользуемся другой формулой Фробениуса (B.2) и найдем решение для $\hat{\tilde{x}}_r$, которое снова подставим в $\hat{\tilde{X}}_2 + i\hat{\tilde{Y}}_2$. В результате окончательное выражение для связи входных и выходных квадратур запишется в виде:

$$\begin{pmatrix} \hat{\tilde{X}}_{out} \\ \hat{\tilde{Y}}_{out} \end{pmatrix} = CZ[A_{22}] \begin{pmatrix} -\tilde{K}_2^{-1} & \tilde{K}_2^{-1} \tilde{K}_1 \\ A_{23} \tilde{D}^{-1} \sin \Theta_3 A_{23}^T \tilde{K}_2^{-1} & -A_{12}^T - A_{23} \tilde{D}^{-1} \sin \Theta_3 \tilde{K}_3 \end{pmatrix}^* \\ * R\left(-\frac{1}{2}\Theta_+\right) S\left(\ln\left[\tan\frac{1}{2}\Theta_-\right]\right) R\left(-\frac{1}{2}\Theta_+\right) \begin{pmatrix} \hat{\tilde{x}}_{in} \\ \hat{\tilde{y}}_{in} \end{pmatrix} + \tilde{E}\hat{\tilde{y}}_r, \quad (3.71)$$

где

$$\tilde{K}_1 = A_{11} - A_{m13} \tilde{D}^{-1} \sin \Theta_3 A_{13}^T, \quad (3.72)$$

$$\tilde{K}_2 = A_{12} - A_{m13} \tilde{D}^{-1} \sin \Theta_3 A_{23}^T, \quad (3.73)$$

$$\tilde{K}_3 = A_{23}^T \tilde{K}_2^{-1} \tilde{K}_1 - A_{13}^T. \quad (3.74)$$

Блочные элементы матрицы ошибок $\tilde{E}$ выписаны в Приложении E.

Мы получили два выражения для связи входных и выходных квадратур в случае вычислений на кластерных состояниях с числом узлов более чем в два раза превосходящем число входных состояний. Полученные выражения записаны в неявном виде и для полноты необходимо еще провести обращение некоторых матриц. Это можно сделать численно для кластеров определенной конфигурации.

3.5.1 Квантовые вычисления реализуемые в данной схеме

Рассмотрим теперь преобразования, которые можно провести в данной схеме вычислений. В первую очередь заметим, что оба выражения (3.67) и (3.71) сводятся к выражению (3.58), полученному в случае, когда кластерных мод ровно в два раза больше, чем входных мод ($n = 2m$). Формально это достигается отсутствием связей между первыми $2m$ узлами графа кластера и остальными l узлами (т.е. при $A_{13} = A_{23} = \mathbf{O}_{m \times l}$). Физически это отвечает тривиальному факту, что все преобразования, которые мы можем выполнить в схеме с меньшим числом узлов, мы можем реализовывать и здесь. Например, преобразование CZ. Более того, для реализации этого преобразования лучше использовать схему с $n = 2m$, поскольку меньшее число узлов обеспечивает меньше источников ошибок, связанных с конечностью

сжатия используемых осцилляторов. Вопрос об ошибках вычислений будет изучен нами отдельно, в следующей главе диссертации. Здесь же давайте рассматривать однонаправленные вычисления, которые нельзя реализовать в случае $n = 2m$.

Универсальное одномодовое преобразование

Мы будем анализировать полученный ранее результат на предмет выполнимости универсального одномодового преобразования. Более того, данное преобразование было бы желательно выполнить с помощью минимального числа кластерных мод, так как каждая дополнительная мода может добавлять ошибку в результат вычислений. Мы уже знаем, что на двухузловом кластерном состоянии универсального одномодового преобразования реализовать не получается (см. (3.63)), поэтому давайте рассмотрим кластерное состояние с тремя узлами, $n = 3$. Уравнения (3.67) и (3.71) в данном случае совпадают и равны

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out} \\ \hat{Y}_{out} \end{pmatrix} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} -\cos \Theta_3 & -g_{13}^2 \sin \Theta_3 \\ g_{23}^2 \sin \Theta_3 & -g_{12}d + g_{13}g_{12}g_{23} \sin \Theta_3 \end{pmatrix} * \\ * R\left(-\frac{1}{2}\Theta_+\right) S\left(\ln\left[\tan\frac{1}{2}\Theta_-\right]\right) R\left(-\frac{1}{2}\Theta_+\right) \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + E\hat{y}_r, \quad (3.75)$$

где g_{ij} – это весовые коэффициенты графа трехузлового кластерного состояния, а $d = g_{12} \cos \Theta_3 - g_{23}g_{13} \sin \Theta_3$. Матрица получившегося преобразования не является универсальной симплектической матрицей. Это можно доказать следующим образом. Допустим, мы хотим уметь реализовывать класс симплектических преобразований, задаваемых матрицами

$$\begin{pmatrix} z \cos \Theta + (z+1) \sin \Theta & (z+1) \cos \Theta - z \sin \Theta \\ -\cos \Theta - \sin \Theta & -\cos \Theta + \sin \Theta \end{pmatrix}, \quad (3.76)$$

при различных $z \in \mathbb{N}$. Матрица преобразования в выражении (3.75) совпадает с матрицей (3.76) при

$$g_{13} = g_{23}\sqrt{1+z}, \quad g_{12} = \frac{1}{1+\sqrt{1+z}}, \quad (3.77)$$

$$\Theta_3 = \operatorname{arccot}(g_{23}^2 z), \quad \Theta_- = \pi/2, \quad \Theta_+ = -\Theta. \quad (3.78)$$

Из этих условий видно, что для реализации различных преобразований (3.76) (при различных значениях параметра z) необходимо каждый раз менять весовые коэффициенты кластерного состояния. Так как весовые коэффициенты кластера определяются способом его генерации, то для реализации различных преобразований (3.76) нужно будет все время генерировать новые кластерные состояния, что очень сложно с практической точки зрения. В результате можно заключить, что с помощью трехузлового кластерного состояния мы не можем выполнять любое одномодовое преобразование, а следовательно данная схема вычислений не является универсальной.

Рассмотрим теперь случай, когда $n = 4$. Общий вид преобразований (3.67) и (3.76) записывается громоздко, поэтому здесь отразим лишь те конфигурации кластерных состояний, которые дают необходимые нам универсальные одномодовые преобразования. Для поиска подходящих конфигураций будем перебирать весовые коэффициенты матрицы смежности. В качестве коэффициентов g_{ij} будем брать числа 0 и 1 (невзвешенный граф), подразумевая под этим отсутствие или наличие связи в графе кластерного состояния. Перебрав все возможные случаи мы нашли пять типов различных конфигураций кластерных состояний, одномодовые вычисления на которых будут универсальными. Все эти конфигурации представлены на Рис. 3.3.

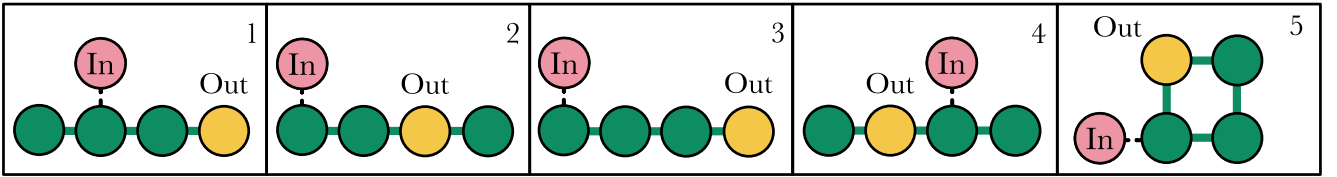


Рис. 3.3: Пять типов конфигураций кластерных состояний, с помощью которых можно реализовать универсальное одномодовое преобразование. На графиках пунктирными линиями обозначены входные состояния IN, которые будут примешиваться к узлам кластерного состояния, OUT – это мода, которая является выходной.

Каждую из пяти приведенных здесь конфигураций можно представить конкретной последовательностью оптических элементов. Мы обсудим, как это сделать только для одной из конфигураций - третьей (см. Рис. 3.4).

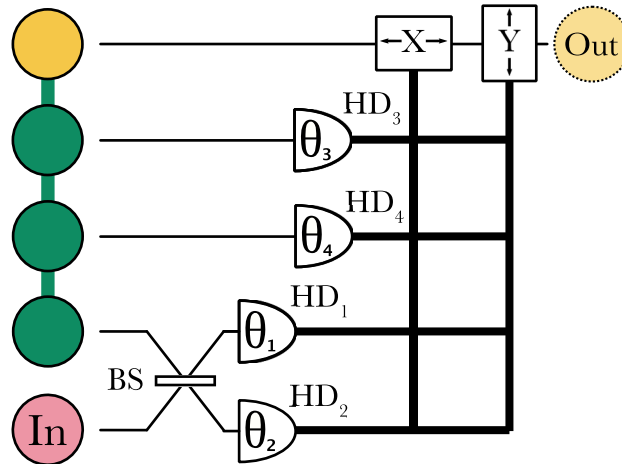


Рис. 3.4: Схема реализации универсального одномодового преобразования с помощью четырехузлового кластерного состояния. На рисунке: In – входное состояние; BS – симметричный светоделитель; HD_j – гомодинные детекторы имеющие локальные осцилляторы с фазами θ_j ; Out – состояние, получающееся в результате действия представленной схемы.

На представленном рисунке к крайнему узлу линейного четырехузлового кластерного состояния примешивается с помощью симметричного светоделителя входное состояние с квадра-

турами $\hat{x}_{in}$ и $\hat{y}_{in}$. Далее в четырех каналах последовательно проводятся измерения с помощью гомодинных детекторов HD $_j$ ($j = 1, \dots, 4$). Каждый такой детектор включает в себя локальный осциллятор с фазой Θ_j . Результаты всех измерений отправляются на приборы X и Y , которые смещают пришедшие на них квадратуры на желаемую величину. Используя принцип квантовой телепортации, можно в пришедших квадратурах убрать полностью классические вклады и оставить только квантовые. Получившиеся в результате квадратуры и будут $\hat{X}_{out}$ и $\hat{Y}_{out}$. Важно отметить, что рассмотренная нами теория верна для любой физической системы, описываемой непрерывными переменными. Использование в примерах оптических элементов является лишь условностью.

Выходные квадратуры, полученные при вычислении в схемах, представленных на Рис. 3.3, связаны с входными квадратурами следующим образом

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out} \\ \hat{Y}_{out} \end{pmatrix} = \tilde{U}_j \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + E_j \hat{y}_r, \quad j = 1, 2, \dots, 5, \quad (3.79)$$

где матрицы преобразований имеют вид:

$$\tilde{U}_1 = \begin{pmatrix} -\cot \Theta_4 \tan \Theta_3 - 1 & \cot \Theta_4 \\ \tan \Theta_3 & -1 \end{pmatrix} R\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\Theta_+\right) S\left(\ln\left[\tan\frac{1}{2}\Theta_-\right]\right) R\left(-\frac{1}{2}\Theta_+\right), \quad (3.80)$$

$$\tilde{U}_2 = R\left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{pmatrix} -\cot \Theta_3 \tan \Theta_4 - 1 & -\tan \Theta_4 \\ -\cot \Theta_3 & -1 \end{pmatrix} R\left(-\frac{1}{2}\Theta_+\right) S\left(\ln\left[\tan\frac{1}{2}\Theta_-\right]\right) R\left(-\frac{1}{2}\Theta_+\right), \quad (3.81)$$

$$\tilde{U}_3 = \begin{pmatrix} \cot \Theta_4 \cot \Theta_3 - 1 & \cot \Theta_4 \\ -\cot \Theta_3 & -1 \end{pmatrix} R\left(\pi - \frac{1}{2}\Theta_+\right) S\left(\ln\left[\tan\frac{1}{2}\Theta_-\right]\right) R\left(-\frac{1}{2}\Theta_+\right), \quad (3.82)$$

$$\tilde{U}_4 = R\left(-\frac{\pi}{2}\right) \begin{pmatrix} \tan \Theta_3 \tan \Theta_4 - 1 & -\tan \Theta_4 \\ \tan \Theta_3 & -1 \end{pmatrix} R\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\Theta_+\right) S\left(\ln\left[\tan\frac{1}{2}\Theta_-\right]\right) R\left(-\frac{1}{2}\Theta_+\right), \quad (3.83)$$

$$\tilde{U}_5 = \begin{pmatrix} \tan \Theta_3 \tan \Theta_4 - 1 & -\tan \Theta_4 \\ \tan \Theta_3 & -1 \end{pmatrix} R\left(-\frac{1}{2}\Theta_+\right) S\left(\ln\left[\tan\frac{1}{2}\Theta_-\right]\right) R\left(-\frac{1}{2}\Theta_+\right), \quad (3.84)$$

а матрицы ошибок E_j записаны в Приложении F. В работе [75] с помощью дополнительных лемм и теорем было показано, что данные матрицы являются матрицами универсальных одномодовых гауссовых преобразований. Нами были найдены [115] явные выражения для разложения этих матриц в виде произведения $R(\varphi_1) S(r) R(\varphi_2 - \Theta_+)$ (см. Приложение G), что является более простым и наглядным доказательство универсальности матриц (3.80)-(3.84).

Таким образом, мы получили, что универсальные одномодовые преобразования реализуются с помощью пяти типов четырехмодовых кластерных состояний. Других кластеров имеющих четыре узла, невзвешенный граф и дающих универсальные одномодовые квантовые преобразования не существует. Хотя мы не будем детально обсуждать ошибки гауссовых

вычислений здесь, и проведем этот анализ в следующей главе диссертации, забегая вперед, скажем что увеличение числа узлов было бы неудачной стратегией проведения вычислений, поскольку неидеальность сжатия каждого узла является дополнительным источником ошибок. Так что, найденные нами конфигурации с минимальным числом узлов, но удовлетворяющие требованию универсальности вычислений, являются оптимальными.

3.6 Заключение по главе 3

В этой главе мы проанализировали все возможные конфигурации кластерных состояний на предмет выявления конфигураций, позволяющих осуществлять универсальные гауссовы преобразования. При этом мы имеем ввиду поиск оптимальных конфигураций кластеров, обеспечивающих также минимальную ошибку вычислений. Анализ ошибок в найденных конфигурациях будет посвящена четвертая глава диссертации.

Решение такой задачи потребовало от нас введения классификации: мы разделили все возможные состояния по способу примешивания входных мод и по числу мод. К первому типу классификации мы отнесли все случаи вычислений, в которых входные состояния примешиваются напрямую к выходным. Мы продемонстрировали, что в этих случаях можно реализовывать двухмодовые управляемые преобразования (например, CZ), но нельзя выполнить одномодовые операции. Поэтому такие схемы, очевидно, не являются универсальными. К другому типу классификации мы отнесли все вычисления, в которых входные состояния примешиваются к измеряемым модам кластерного состояния. Нами было показано, что, если число кластерных мод превосходит удвоенное число входных мод, то вычисления на таких кластерах могут быть универсальными. Если же число кластерных мод совпадает с удвоенным числом входных мод, то преобразования, реализуемые на этих кластерах, будут принадлежать множеству генераторов группы универсальных гауссовых преобразований. Это означает, что в данных схемах вычислений могут быть реализованы любые преобразования, но для этого необходимо многократно отправлять результат одних преобразований на вход других.

Для полноты картины, нужно было бы рассмотреть еще случай вычислений, когда некоторые моды примешиваются напрямую к выходным, а другие через измеряемые. Однако, проведя анализ данного случая, мы получили громоздкое решение, которое по своей сути является линейной комбинацией решений, полученных в разделах 3.3 и 3.5. Это означает, что такой тип вычислений не является универсальным, поскольку преобразование входных мод, соединенных напрямую с выходными узлами, будет идти не универсальным образом.

Кроме того, анализ всех полученных выражений для связи входных и выходных квадратур показал, что во всех случаях как само преобразование (результат вычислений), так и среднеквадратичные флуктуации ошибок зависят лишь от конфигурации кластерного состояния, но не от способа его получения.

Глава 4

Минимизация ошибок однонаправленных вычислений

Как мы уже выяснили, главным ограничением в модели однонаправленных квантовых вычислений в непрерывных переменных является ошибка в результатах вычислений, связанная с использованием физических систем с конечным фиксированным сжатием. При вычислении каждая такая система (каждый узел кластерного состояния) добавляет в результат ошибку, пропорциональную величине своего сжатия. Следовательно, чем больше узлов кластерного состояния используется для вычислений, тем больше будет ошибка. Как было отмечено в Главе 1, для успешного применения квантовых кодов коррекции нужно минимизировать эти ошибки. То есть нужно стараться проводить вычисления на кластерных состояниях с минимальным числом узлов. С другой стороны, количества используемых узлов должно хватать для реализации квантовых преобразований. Так мы естественным образом приходим к понятию оптимального числа узлов.

В прошлой главе мы искали конфигурации кластерных состояний, на которых можно выполнять универсальные гауссовы вычисления. В результате мы выявили два типа интересных конфигураций. К первому типу относятся такие конфигурации, на которых универсальные вычисления могут быть реализованы напрямую, без каких либо дополнений. Ко второму типу мы относим конфигурации, на которых можно реализовывать лишь некоторые преобразования из набора генераторов группы универсальных гауссовых преобразований (группы Клиффорда). В этой главе мы дополним конфигурации второго типа так, чтобы с их помощью можно было реализовывать универсальные преобразования. После этого мы сравним ошибки во всех имеющихся схемах универсальных преобразований. В результате мы найдем схемы, которые дают минимальную ошибку при любом фиксированном сжатии используемых квантовых осцилляторов. Мы также представим рецепт, согласно которому, зная, какое преобразование необходимо выполнить, можно подобрать кластер и построить вычислительную схему, обеспечивающие выполнение преобразования с минимальной ошибкой. Результаты, рассматриваемые в этой главе, впервые были получены мной в работе [116].

4.1 Не модифицированные однонаправленные квантовые вычисления

Начнем наш анализ со случая не модифицированных однонаправленных вычислений, когда для преобразований входных состояний используется одно кластерное состояние без каких-либо дополнений. Для выполнения универсальных гауссовых преобразований в данном случае нецелесообразно использовать кластерные состояния с большим числом узлов, потому что при вычислении на таком состоянии будет накапливаться ошибка. В результате можно столкнуться с ситуацией, когда ошибка перекроет полезный результат и ее будет невозможно скомпенсировать квантовыми кодами коррекции ошибок [108]. Предпочтительным способом реализации универсальных гауссовых вычислений является последовательное преобразование входных состояний с помощью кластеров двух конфигураций. Кластерные состояния с конфигурацией первого типа должны быть пригодны для выполнения универсальных одномодовых операций, а кластеры с конфигурацией второго типа – для двухмодового преобразования CZ . При этом каждая конфигурация должна иметь минимально-возможное число узлов, чтобы гарантировать минимальность ошибки соответствующего преобразования. Кроме того, вычисления, выполняемые таким образом, можно чередовать с процедурой коррекции ошибок так, чтобы ошибка не накапливалась в результатах. Таким образом, при выполнении универсальных гауссовых операций данным способом, ошибка в результатах будет наименьшей. Давайте перейдем к оценке этой ошибки.

4.1.1 Одномодовые преобразования

Сперва оценим ошибку, получаемую при реализации универсальных одномодовых преобразований. В разделе 3.5.1 было продемонстрировано, что минимальное число узлов кластерного состояния необходимое для выполнения данных преобразований равно четырем. Мы выявили, что существует только два вида конфигураций кластерных состояний, которые удовлетворяют требованию универсальности преобразования: линейная и квадратная (см. Рис. 3.3). На линейном кластерном состоянии можно выполнить четыре различных типа универсальных одномодовых преобразований. Это следует из возможных взаимных расположений на графе входного узла (узла кластера к которому примешивается входное состояние) и неизмеряемого (выходного) узла. Для квадратного кластерного состояния ситуация отличается, поскольку данное состояние можно использовать для универсальных одномодовых вычислений только в случае, когда входной и выходной узлы связаны между собой. Это ограничение и симметрия квадратного кластерного состояния приводят к тому, что только один вариант взаимного расположения узлов пригоден для произвольных одномодовых преобразований.

Таким образом одномодовое гауссово преобразование может быть выполнено на четырехузловых кластерах пятью различными способами. Возникает вопрос, является ли ка-

кой либо из этих способов предпочтительным по сравнению с другими. Для ответа на этот вопрос сравним между собой все результаты, полученные при вычислениях на кластерах представленных на Рис. 3.3. Так как мы доказали (Приложение G), что все эти преобразования являются универсальными одномодовыми преобразованиями при $\Theta_- = \pi/2$, мы можем сравнивать их только по ошибкам в результатах вычислений. Другими словами мы можем сравнивать между собой векторы ошибок

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{d_2} \begin{pmatrix} 3 \cot \Theta_4^1 & \cot \Theta_4^1 & -1 - 2 \cot \Theta_4^1 \tan \Theta_3^1 & -3 - \cot \Theta_4^1 \tan \Theta_3^1 \\ -2 & 1 & 2 \tan \Theta_3^1 & \tan \Theta_3^1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} d_1 - 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & d_1 - 1 \end{pmatrix} \hat{y}_s, \quad (4.1)$$

$$\hat{e}_2 = \frac{1}{d_2} \begin{pmatrix} 2 \cot \Theta_3^2 & \cot \Theta_3^2 & -3 & -1 \\ -2 \cot \Theta_3^2 \tan \Theta_4^2 - 1 & 2 - \cot \Theta_3^2 \tan \Theta_4^2 & 2 \tan \Theta_4^2 & -\tan \Theta_4^2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} d_1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & d_1 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 - 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & d_1 \end{pmatrix} \hat{y}_s \quad (4.2)$$

$$\hat{e}_3 = \frac{1}{d_2} \begin{pmatrix} 1 - 2 \cot \Theta_3^3 \cot \Theta_4^3 & \cot \Theta_3^3 & 3 \cot \Theta_3^3 & -2 - \cot \Theta_3^3 \cot \Theta_4^3 \\ 2 \cot \Theta_4^3 & 1 & -2 & \cot \Theta_4^3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & d_1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & d_1 - 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & d_1 - 1 \end{pmatrix} \hat{y}_s \quad (4.3)$$

$$\hat{e}_4 = \frac{1}{d_2} \begin{pmatrix} -3 & \tan \Theta_3^4 & 2 \tan \Theta_3^4 & -1 \\ 2 \tan \Theta_4^4 & 3 - \tan \Theta_3^4 \tan \Theta_4^4 & 1 - 2 \tan \Theta_3^4 \tan \Theta_4^4 & -\tan \Theta_4^4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} d_1 - 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & d_1 - 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & d_1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & d_1 \end{pmatrix} \hat{y}_s, \quad (4.4)$$

$$\hat{e}_5 = \frac{1}{d_1 + 2} \begin{pmatrix} \tan \Theta_3^5 \tan \Theta_4^5 - 3 & 2 \tan \Theta_4^5 & 3 \tan \Theta_4^5 & -\tan \Theta_3^5 \tan \Theta_4^5 - 2 \\ \tan \Theta_3^5 & 3 & 2 & -\tan \Theta_3^5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & d_1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & d_1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & d_1 \end{pmatrix} \hat{y}_s, \quad (4.5)$$

где индекс i в фазах Θ_3^i и Θ_4^i отвечает одной из пяти схем реализации одномодового преобразования. В выражениях выше мы ввели обозначения: $d_1 = \sqrt{5} + 3$; $d_2 = \sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}$; $\hat{y}_s = (\hat{y}_{s,1}, \hat{y}_{s,2}, \hat{y}_{s,3}, \hat{y}_{s,4})^T$ – вектор операторов сжатых квадратур осцилляторов, используемых при генерации кластерных состояний. Представленные векторы содержат произведение матриц $E_1, \dots, E_5$ (из Приложения F) и $\{\text{Re } U_i = (I + A_i)^{-1/2}\}_{i=1}^5$ (индекс i соответствует номеру схемы на Рис. 3.3).

Корректно сравнивать преобразования, которые выполняют одни и те же действия, т.е. переводят входное состояние в одинаковое выходное. Этого можно добиться, подобрав соответствующим образом фазы локальных осцилляторов $\{\Theta_3^j, \Theta_4^j, \Theta_+^j\}_{j=1}^5$, где j указывает на номер вычислительной схемы. Тогда различные матрицы (3.80)-(3.84) совпадут между собой. Связи всех этих фаз задаются следующими выражениями:

$$\Theta_4^1 = \Theta_4^3, \quad \Theta_3^2 = \Theta_3^3, \quad (4.6)$$

$$\Theta_3^1 = \Theta_3^4 = \Theta_3^5 = -\arctan(\cot \Theta_3^3), \quad (4.7)$$

$$\Theta_4^2 = \Theta_4^4 = \Theta_4^5 = -\arctan(\cot \Theta_4^3), \quad (4.8)$$

$$\Theta_+^1 = \Theta_+^4 = \Theta_+^3 - \frac{\pi}{2}, \quad \Theta_+^2 = \Theta_+^5 = \pi - \Theta_+^3. \quad (4.9)$$

Теперь мы можем сравнивать ошибки, получаемые при одинаковых преобразованиях, в различных схемах вычислений (Рис. 3.3). Для этого давайте перейдем от векторов ошибок (4.1)-(4.5) к векторам, состоящим из среднеквадратичных флуктуаций ошибок $\langle \delta \hat{e}_j^2 \rangle$. При этом воспользуемся выражениями (4.6)-(4.9) и тем фактом, что все сжатые осцилляторы, участвующие в генерации кластеров, являются независимыми и имеют одинаковые среднеквадратичные флуктуации $\hat{y}$ -квадратур, т.е. выполняется условие (2.15). В результате мы получим равенства вида

$$\langle \delta \hat{e}_1^2 \rangle = R\left(\frac{\pi}{2}\right) \langle \delta \hat{e}_2^2 \rangle = \langle \delta \hat{e}_3^2 \rangle = R\left(\frac{\pi}{2}\right) \langle \delta \hat{e}_4^2 \rangle = \langle \delta \hat{e}_5^2 \rangle \equiv \langle \delta \hat{e}_{4modes}^2 \rangle, \quad (4.10)$$

где

$$\langle \delta \hat{e}_{4modes}^2 \rangle = \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle \begin{pmatrix} 2 \cot \Theta_3 \cot \Theta_4 (1 + \cot \Theta_3 \cot \Theta_4) + 3 \csc^2 \Theta_4 \\ 3 + 2 \cot^2 \Theta_3 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Это значит, что, какую бы схему вычислений с четырехузловым кластерным состоянием мы не выбрали, среднеквадратичные флуктуации ошибок одних и тех же преобразований

будут одинаковы с точностью до переобозначения $\hat{x}$ и $\hat{y}$ квадратур. Полученный результат интересен, поскольку сами способы реализации универсальных одномодовых преобразований отличаются друг от друга как векторами ошибок, так и используемыми графами.

4.1.2 Двухмодовое преобразование CZ

Перейдем теперь к реализации преобразования CZ. В прошлой главе мы показали, что наилучший результат реализации этого преобразования (с наименьшей ошибкой) будет достигаться при вычислении на кластерных состояниях с количеством узлов в два раза превосходящим число входных узлов. На Рис. 3.2 представлен пример реализации двухмодового преобразования CZ с помощью линейного четырехузловое кластерного состояния. Выходные квадратуры, полученные при вычислениях в такой схеме, задаются выражением (3.62). Для дальнейшего сравнения различных схем нам понадобится вектор среднеквадратичных флуктуаций ошибок данного преобразования, который имеет следующий вид

$$\langle \delta \hat{e}_{CZ}^2 \rangle = \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Мы видим, что ошибки данного преобразования не зависят от фаз осцилляторов, поскольку для его реализации уже были выбраны определенные фазы. Отметим также, что для реализации преобразования CZ не имеет смысла рассматривать состояния с числом узлов больше четырех, поскольку они заведомо будут давать большие ошибки, так как имеют больше источников ошибок (осцилляторов с конечным сжатием).

Таким образом, если для вычислений использовать только немодифицированные схемы однонаправленных квантовых вычислений, то наилучшим подходом будет использование ансамблей четырехузловых кластерных состояний. Давайте теперь посмотрим на реализацию универсальных преобразований расширив границы допустимых операций, и дополнив кластерные преобразования другими гауссовыми. Мы оценим ошибки которые будут при этом получаться и сравним их с ошибками при вычислениях на кластерных состояниях, рассмотренными выше.

4.2 Квантовые вычисления за пределами модели однонаправленных вычислений

До сих пор мы обсуждали какую конфигурацию кластера выбрать, чтобы обеспечить минимальную ошибку однонаправленных квантовых вычислений, выполняемых целиком посредством измерений над кластерным состоянием. Мы убедились, что выполнение как одномодовых, так и двухмодовых гауссовых операций требует как минимум 4-х узлового кластера

для каждой из операций. Мы получили оценку минимальной возможной ошибки таких вычислений. В этом разделе мы хотим задаться вопросом, нельзя ли еще более снизить ошибку вычислений, выйдя за рамки чисто однонаправленных вычислений на кластерных состояниях и дополнив их простейшими линейными устройствами.

4.2.1 Одномодовые преобразования

Начнем наше рассмотрение квантовых вычислений за пределами чистой кластерной идеологии с одномодовых преобразований. В разделе 3.4 мы показали, что одномодовое преобразование (3.63), выполняемое на двухузловом кластерном состоянии, не является универсальным (оно имеет разложение Блоха-Мессиа вида $R(\varphi_1)S(r)R(\varphi_1)$, которое не является универсальным $R(\varphi_1)S(r)R(\varphi_2)$). Тем не менее, такое преобразование важно с точки зрения оптимизации ошибок вычислений, поскольку оно реализуется на минимальном нетривиальном кластерном состоянии (состоянии с минимальным числом узлов, а значит – с минимальной ошибкой). Давайте попробуем дополнить данное преобразование до универсального так, чтобы не сильно увеличить ошибку.

Рассмотрим два подхода дополнения преобразования (3.63) до универсального. Первый подход состоит в использовании двух двухузловых кластерных состояний [95, 117]. Результат вычислений на первом двухузловом состоянии (квадратуры (3.63)) отправляются в качестве входных на точно такое же двухузловое кластерное состояние. Схема реализации такого составного преобразования представлена на Рис. 4.1

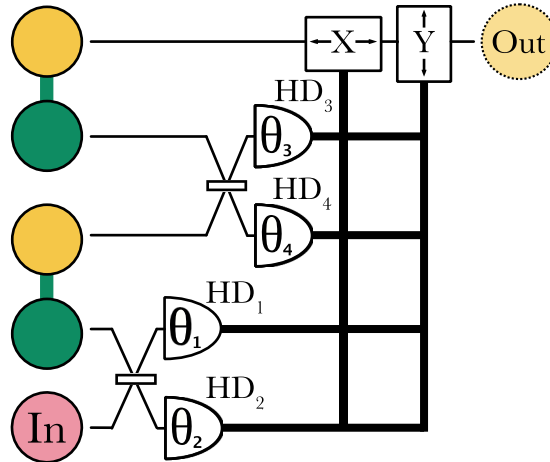


Рис. 4.1: Схема реализации универсального одномодового преобразования с помощью пары двухузловых кластерных состояний. Обозначения аналогичны обозначениям на Рис. 3.2.

Выходные квадратуры, полученные в результате таких вычислений, имеют следующий вид

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out} \\ \hat{Y}_{out} \end{pmatrix} = R \left(-\frac{1}{2}\Theta_+^2 \right) S \left(\ln \left[\tan \frac{1}{2}\Theta_-^2 \right] \right) R \left(-\frac{1}{2}\Theta_+^2 \right) * \\ * R \left(-\frac{1}{2}\Theta_+^1 \right) S \left(\ln \left[\tan \frac{1}{2}\Theta_-^1 \right] \right) R \left(-\frac{1}{2}\Theta_+^1 \right) \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \\ + \sqrt{2} R \left(-\frac{1}{2}\Theta_+^2 \right) S \left(\ln \left[\tan \frac{1}{2}\Theta_-^2 \right] \right) R \left(-\frac{1}{2}\Theta_+^2 \right) \begin{pmatrix} \hat{y}_{s,1} \\ \hat{y}_{s,2} \end{pmatrix} + \sqrt{2} \begin{pmatrix} \hat{y}_{s,3} \\ \hat{y}_{s,4} \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

где $\Theta_\pm^1 = \Theta_1 \pm \Theta_2$ и $\Theta_\pm^2 = \Theta_3 \pm \Theta_4$ – суммы и разности фаз локальных осцилляторов, используемых при гомодинных детектированиях, $\{\hat{y}_{s,k}\}_{k=1}^4$ – сжатые квадратуры осцилляторов, используемые для генерации двухузловых кластерных состояний.

Если в выражении (4.13) положить $\Theta_-^1 = \frac{\pi}{2}$, то оставшееся преобразование будет универсальным одномодовым преобразованием вида

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out} \\ \hat{Y}_{out} \end{pmatrix} = R \left(-\frac{1}{2}\Theta_+^2 \right) S \left(\ln \left[\tan \frac{1}{2}\Theta_-^2 \right] \right) R \left(-\frac{1}{2}\Theta_+^2 - \Theta_+^1 \right) \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \hat{e}_{2pair,1}, \quad (4.14)$$

где вектор ошибок имеет вид

$$\hat{e}_{2pair,1} = \sqrt{2} R \left(-\frac{1}{2}\Theta_+^2 \right) S \left(\ln \left[\tan \frac{1}{2}\Theta_-^2 \right] \right) R \left(-\frac{1}{2}\Theta_+^2 \right) \begin{pmatrix} \hat{y}_{s,1} \\ \hat{y}_{s,2} \end{pmatrix} + \sqrt{2} \begin{pmatrix} \hat{y}_{s,3} \\ \hat{y}_{s,4} \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Однако, преобразование (4.13) также будет универсальным при $\Theta_-^2 = \frac{\pi}{2}$. В таком случае преобразование будет задаваться следующим выражением

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out} \\ \hat{Y}_{out} \end{pmatrix} = R \left(-\Theta_+^2 - \frac{1}{2}\Theta_+^1 \right) S \left(\ln \left[\tan \frac{1}{2}\Theta_-^1 \right] \right) R \left(-\frac{1}{2}\Theta_+^1 \right) \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \hat{e}_{2pair,2}, \quad (4.16)$$

где

$$\hat{e}_{2pair,2} = \sqrt{2} R \left(-\Theta_+^2 \right) \begin{pmatrix} \hat{y}_{s,1} \\ \hat{y}_{s,2} \end{pmatrix} + \sqrt{2} \begin{pmatrix} \hat{y}_{s,3} \\ \hat{y}_{s,4} \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Преобразования (4.14) и (4.16) отличаются друг от друга только вектором ошибок. Давайте сравним их по этим векторам. В первую очередь, перейдем от векторов ошибок к векторам состоящим из их среднеквадратичных флуктуаций:

$$\langle \delta \hat{e}_{2pairs,1}^2 \rangle = \frac{4\langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle}{\sin^2 \Theta_-^2} \begin{pmatrix} 1 + \cos \Theta_+^2 \cos \Theta_-^2 \\ 1 - \cos \Theta_+^2 \cos \Theta_-^2 \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

$$\langle \delta \hat{e}_{2pairs,2}^2 \rangle = \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Здесь, как и раньше мы использовали свойство (2.15). Так как $\min \left[\frac{4\langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle}{\sin^2 \Theta_-^2} (1 \pm \cos \Theta_+^2 \cos \Theta_-^2) \right] = 4\langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$, то ошибка в выражении (4.18) всегда не меньше,

ошибки в (4.19). Таким образом, мы нашли способ реализации универсального одномодового преобразования на паре двухузловых кластерных состояний с минимальной ошибкой.

Давайте рассмотрим другую схему дополнения преобразования (3.63). Чтобы данное преобразование стало универсальным достаточно лишь домножить его на преобразование поворота на произвольный угол $R(\varphi)$. Для световых систем, такое преобразование поворота квадратур удобнее всего реализовывать за счет фазовых модуляторов, установленных в световом канале. Если же мы используем ансамбли атомов или, например, оптомеханические системы, то в этом случае для выполнения данного преобразования удобно использовать свободную эволюцию системы, то есть предоставить систему самой себе на определенное время. В результате эволюции квадратур $\hat{X}_{out}$ и $\hat{Y}_{out}$ свободным гамильтонианом $\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{X}_{out}^2 + \hat{Y}_{out}^2)$, мы получаем необходимое преобразование вида:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}'_{out} \\ \hat{Y}'_{out} \end{pmatrix} = R\left(\varphi - \frac{1}{2}\Theta_+^1\right) S\left(\ln\left[\tan\frac{1}{2}\Theta_-^1\right]\right) R\left(-\frac{1}{2}\Theta_+^1\right) \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \sqrt{2}R(\varphi) \begin{pmatrix} \hat{y}_{s,1} \\ \hat{y}_{s,2} \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Вектор среднеквадратичных флуктуаций ошибок в данном случае имеет вид

$$\langle \delta \hat{e}_{2oscil}^2 \rangle = \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Элементы представленного вектора меньше элементов вектора $\langle \delta \hat{e}_{2pairs,2}^2 \rangle$. Это означает, что и ошибка будет меньше. Такой результат объясняется тем, что для реализации универсального одномодового преобразования в последнем случае использовалось минимальное число осцилляторов и преобразование, которое не вносит дополнительных ошибок.

Давайте теперь сравним оба подхода, рассмотренных в этом разделе, со случаями реализации универсальных одномодовых преобразований на четырехузловых кластерных состояниях (Раздел 4.1.1). Сравнивать, как и раньше мы будем вектора среднеквадратичных флуктуаций ошибок. Сравним сперва вектор

$$\langle \delta \hat{e}_{4modes}^2 \rangle = \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle \begin{pmatrix} 2 \cot \Theta_3 \cot \Theta_4 (1 + \cot \Theta_3 \cot \Theta_4) + 3 \csc^2 \Theta_4 \\ 3 + 2 \cot^2 \Theta_3 \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

с вектором $\langle \delta \hat{e}_{2oscil}^2 \rangle$, задаваемым выражением (4.21). Сравнение будем производить покомпонентно. Так как мы ищем конфигурации кластерных состояний, которые дают наименьшую ошибку, то сравнение нужно начать с поиска минимальных значений компонент векторов. Для вектора $\langle \delta \hat{e}_{4modes}^2 \rangle$ минимальные значения компонент совпадают между собой и равны

$$\min_{\Theta_3, \Theta_4} \{2 \cot \Theta_3 \cot \Theta_4 (1 + \cot \Theta_3 \cot \Theta_4) + 3 \csc^2 \Theta_4\} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle = \min_{\Theta_3} \{3 + 2 \cot^2 \Theta_3\} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle = 3 \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle.$$

Это значение больше чем $2 \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$ (всегда больше значения компонент вектора $\langle \delta \hat{e}_{2oscil}^2 \rangle$). Из этого следует, что ошибка универсальных одномодовых преобразований, реализуемых на четырехузловых кластерных состояниях всегда больше, чем ошибка, получаемая при использовании одного двухузлового состояния дополненного вращателем квадратур.

Для полноты картины, давайте также сравним вектора среднеквадратичных флуктуаций ошибок, получаемых при вычислении на четырехузловых кластерных состояниях (4.22), с вектором среднеквадратичных флуктуаций ошибок в наилучшем случае вычислений на парах двухузловых кластерных состояний (4.19). Как мы уже выяснили, вектор (4.22) имеет элементы, минимальное значение которых равно $3\langle\delta\hat{y}_s^2\rangle$, что меньше элементов вектора (4.19). Это означает, что для некоторых преобразований схема вычислений с парой двухузловых кластерных состояний дает большую ошибку. Однако, для других преобразований ситуация противоположна. Причем для некоторых преобразований среднеквадратичные флуктуации ошибок в схеме с четырехузловым кластером будут больше только по одной квадратуре, а для некоторых сразу по двум. Это означает, что мы не сможем однозначно ответить на вопрос какой случай вычислений лучше. Однако, мы можем сравнивать два подхода по числу преобразований в которых результат имеет меньшую ошибку по двум квадратурам. Для этого перейдем от векторов среднеквадратичных флуктуаций ошибок (4.19) и (4.22) к их L_∞ нормам, которые определяются выражением $\|\vec{v}\|_\infty = \max_i |v_i|$. С помощью данных норм удобно сравнивать максимальные ошибки в квадратурах при различных значениях параметров Θ_3 и Θ_4 . Для рассматриваемых векторов среднеквадратичных флуктуаций ошибок данные нормы задаются следующими выражениями:

$$\|\langle\delta\hat{e}_{4modes}^2\rangle\|_\infty = \max_{\Theta_3, \Theta_4} \{\cot \Theta_3 \cot \Theta_4 (1 + \cot \Theta_3 \cot \Theta_4) + 3 \csc^2 \Theta_4; 3 + 2 \cot^2 \Theta_3\} \langle\delta\hat{y}_s^2\rangle \quad (4.23)$$

$$\|\langle\delta\hat{e}_{2mode,2}^2\rangle\|_\infty = 4\langle\delta\hat{y}_s^2\rangle \quad (4.24)$$

Так как величина $\langle\delta\hat{y}_s^2\rangle$ в обоих выражениях одинакова, то можно сравнивать лишь коэффициенты при ней. Для наглядности сравнения удобно построить функции $\|\langle\delta\hat{e}_{4modes}^2\rangle\|_\infty$ и $\|\langle\delta\hat{e}_{2mode,2}^2\rangle\|_\infty$ в координатах (Θ_3, Θ_4) . График этих функций представлен на Рис. 4.2.

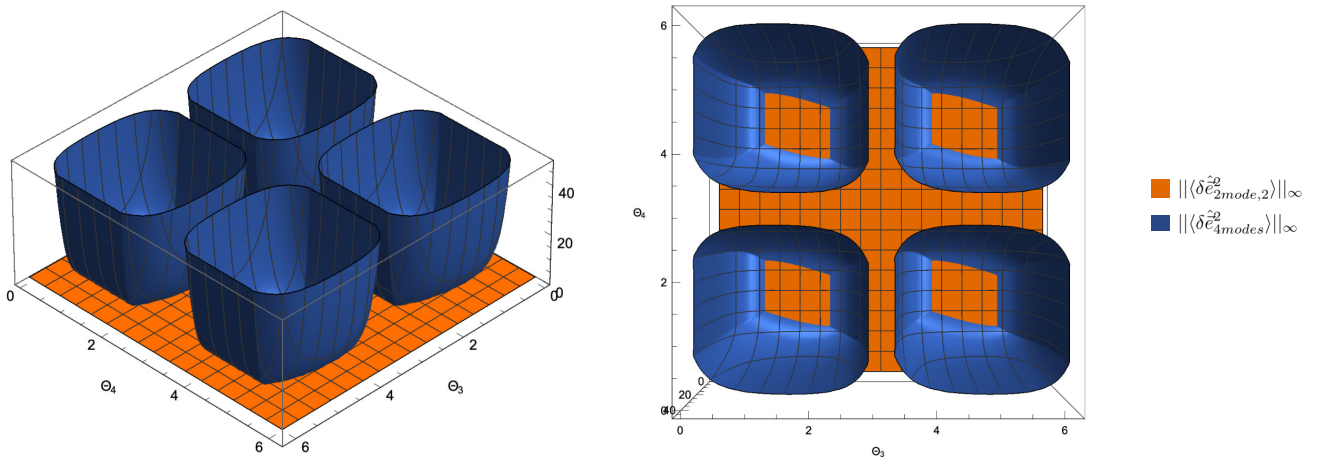


Рис. 4.2: Трехмерные поверхности ошибок, получаемых при вычислении в двух схемах. На рисунке представлены две проекции одной поверхности. Синим цветом на графике обозначено распределение ошибок $\|\langle\delta\hat{e}_{4modes}^2\rangle\|_\infty$, а оранжевым — $\|\langle\delta\hat{e}_{2pairs,2}^2\rangle\|_\infty$.

Данные графики отображают величину ошибок в двух схемах вычислений в зависимости от совершаемого преобразования. График функции $||\langle \delta \vec{e}_{4modes}^2 \rangle||_\infty$ в координатных осях Θ_3 , Θ_4 напоминает по форме баночки для йогурта: в четырех областях, соответствующих доннышкам баночек, норма вектора ошибок минимальна. Эта норма нарастает довольно резко, имитируя стенки баночек.

Из Рис. 4.2 видно в каких областях вычисления на четырехузловых кластерных состояниях дают меньшую ошибку, а в каких ситуация противоположна. Для сравнения двух подходов по числу преобразований с меньшей ошибкой найдем площадь S_1 , занимаемую точками Θ_3 и Θ_4 , в которых $||\langle \delta \vec{e}_{4modes}^2 \rangle||_\infty < ||\langle \delta \vec{e}_{2pairs,2}^2 \rangle||_\infty$, и площадь S_2 , где $||\langle \delta \vec{e}_{2pairs,2}^2 \rangle||_\infty < ||\langle \delta \vec{e}_{4modes}^2 \rangle||_\infty$. Взяв отношение этих двух площадей мы получим

$$\frac{S_2}{S_1} \approx 6.$$

То есть вычисления с парой двухузловых кластерных состояний дают меньшую ошибку для большего числа преобразований. Более того, при реализации преобразований растяжений в схеме вычислений с четырехузловым кластерным состоянием (при значениях Θ_3 и Θ_4 близких к π) максимальная ошибка будет увеличиваться соразмерно растяжению, что видно на Рис. 4.2. В схеме вычисления с парой двухузловых кластерных состояний такого происходить не будет, поскольку ошибка там всегда одинакова.

Резюмируя все вышесказанное можно заключить, что наилучший случай реализации универсальных одномодовых гауссовых преобразований получается при вычислении на двухузловом кластерном состоянии с дополнительным вращателем квадратур. После него по величине ошибки следует случай вычислений на паре двухузловых кластерных состояний. Как оказалось, случай вычислений на четырехузловом кластерном состоянии является самым плохим по величине ошибки в результатах.

4.2.2 Преобразование CZ

Давайте теперь рассмотрим другие схемы реализации преобразования CZ. Как и раньше мы выйдем из "классической" кластерной идеологии. Мы рассмотрим другие возможные конфигурации и сравним их все между собой на предмет величины ошибки.

В качестве первого примера рассмотрим реализацию CZ на двухузловых кластерных состояниях. В разделе 3.2 мы доказали, что на двухузловых кластерных состояниях можно реализовать двухмодовое преобразование типа CZ, которое задается следующим выражением

$$\begin{pmatrix} \hat{X}'_{out,1} \\ \hat{X}'_{out,2} \\ \hat{Y}'_{out,1} \\ \hat{Y}'_{out,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} U_{CZ} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in,1} \\ \hat{x}_{in,2} \\ \hat{y}_{in,1} \\ \hat{y}_{in,2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{y}_{s,1} \\ \hat{y}_{s,2} \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Как видно, здесь мы не получаем чистого преобразования CZ , а получаем совместное действие оператора CZ и оператора сжатия $\hat{y}$ -квадратур. Для того, чтобы данное преобразование превратилось в чистое CZ , необходимо его дополнить растяжением двух выходных $\hat{y}$ -квадратур. Из выражения (3.63) мы видим, что одномодовое растяжение можно реализовать с помощью двухузлового кластерного состояния, если при вычислении подобрать фазы локальных осцилляторов так, чтобы $\Theta_- = -2 \arctan\left(\frac{\ln 2}{2}\right)$ и $\Theta_+ = 0$. Если использовать два двухузловых кластерных состояния, то можно произвести растяжение $\hat{y}$ квадратур. Результат такого растяжения можно записать в векторном виде следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out,1} \\ \hat{X}_{out,2} \\ \hat{Y}_{out,1} \\ \hat{Y}_{out,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}'_{in,1} \\ \hat{x}'_{in,2} \\ \hat{y}'_{in,1} \\ \hat{y}'_{in,2} \end{pmatrix} + \sqrt{2} \begin{pmatrix} \hat{y}_{s,3} \\ \hat{y}_{s,4} \\ \hat{y}_{s,5} \\ \hat{y}_{s,6} \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Применив данное преобразование к квадратурам из выражения (4.25) (подставив квадратуры (4.25) в качестве начальных в выражение (4.26)), мы получим чистое преобразование CZ вида

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out,1} \\ \hat{X}_{out,2} \\ \hat{Y}_{out,1} \\ \hat{Y}_{out,2} \end{pmatrix} = U_{CZ} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in,1} \\ \hat{x}_{in,2} \\ \hat{y}_{in,1} \\ \hat{y}_{in,2} \end{pmatrix} + \sqrt{2} \begin{pmatrix} \hat{y}_{s,3} \\ \hat{y}_{s,4} \\ \hat{y}_{s,5} - \hat{y}_{s,1} \\ \hat{y}_{s,6} - \hat{y}_{s,2} \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

где $\{\hat{y}_{s,j}\}_{j=1}^6$ – это сжатые квадратуры осцилляторов, используемых при вычислении. Здесь важно отметить, что при реализации данного преобразования мы добавили в вычислительную схему два двухузловых кластерных состояния, которые, в свою очередь, внесли дополнительную ошибку в результаты вычислений (сжатые квадратуры $\{\hat{y}_{s,i}\}_{i=3}^6$ в выражении (4.27)). На Рис. 4.3 представлен пример реализации преобразования CZ описанным методом.

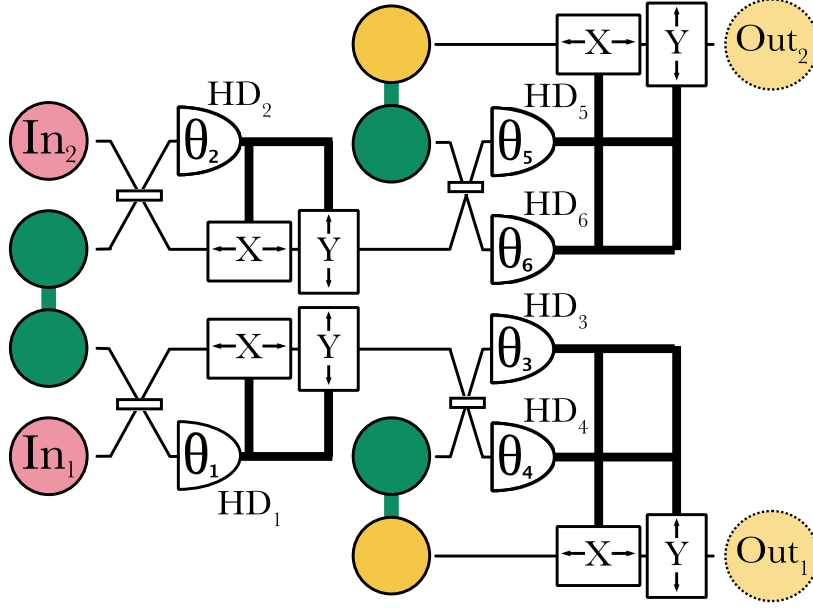


Рис. 4.3: Схема реализации двухмодового преобразования CZ с помощью двухузловых кластерных состояний. На рисунке: In_1 , In_2 – входные состояния, Out_1 и Out_2 обозначены состояния, полученные в результате выполнения представленной схемы. Здесь фазы гомодинных детекторов равны $\Theta_2 = \Theta_1 = 0$ и $\Theta_6 = \Theta_3 = -\Theta_4 = -\Theta_5 = -\arctan[\ln 2/2]$. Обозначения аналогичны обозначениям на Рис. 3.2.

В первой части схемы слева реализуется преобразование (4.25). Далее результаты этого преобразования отправляются на вход двух преобразований растяжения (4.26), реализуемых с помощью двухузловых кластерных состояний.

Для сравнения полученного преобразования с остальными найдем его вектор среднеквадратичных флуктуаций ошибок. Такой вектор выглядит следующим образом:

$$\langle \delta \hat{e}_{CZ,1}^2 \rangle = \langle \delta \hat{g}_s^2 \rangle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix},$$

где, как и раньше, мы воспользовались условием независимости сжатых осцилляторов (2.15). Сравнивая данный вектор с вектором (4.12), полученным при вычислении на четырехузловом кластерном состоянии мы видим, что $\|\langle \delta \hat{e}_{CZ}^2 \rangle\|_\infty < \|\langle \delta \hat{e}_{CZ,1}^2 \rangle\|_\infty$. То есть ошибка при вычислении на четырехузловом кластерном состоянии меньше.

Давайте теперь рассмотрим еще одну схему реализации преобразования CZ [117], которая представлена на Рис. 4.4.



Рис. 4.4: Схема реализации преобразования CZ.

В этой схеме два входных состояния смешиваются на симметричных светоделителях и после этого отправляются на две независимые схемы реализации одномодовых универсальных преобразований. Далее, полученные после преобразований состояния снова попадают на симметричный светоделитель. Мы считаем, что светоделители идеальные и не вносят дополнительных ошибок в схему. Главным источником ошибок здесь являются одномодовые преобразования. Такое предположение соответствует типичным экспериментам над квантовыми системами.

Для реализации преобразования CZ в данной схеме нужно выполнить два одномодовых преобразования вида

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Как мы уже выяснили, одномодовые преобразования лучше всего реализовывать с помощью двухузлового кластерного состояния и дополнительного поворота квадратур (раздел 4.2.1). Для реализации преобразования A нужно в выражении (4.20) положить $\varphi = \pi/2$, $\Theta_-^1 = \arctan 2$, $\Theta_+^1 = \arctan 2$. Для реализации же преобразования B нам нужно потребовать следующих равенств: $\varphi = \pi/2$, $\Theta_-^1 = -\arctan 2$, $\Theta_+^1 = -\arctan 2$. В результате ошибки в каждом из этих преобразований задаются следующими выражениями:

$$\vec{e}_A = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \hat{y}_{s,2} \\ -\hat{y}_{s,1} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_B = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \hat{y}_{s,4} \\ -\hat{y}_{s,3} \end{pmatrix}.$$

После второго светоделителя ошибки смешиваются. В результате общий вектор ошибок, полученных в данной реализации преобразования CZ, имеет следующий вид

$$\vec{e}_{CZ,2} = \begin{pmatrix} \hat{y}_{s,2} + \hat{y}_{s,4} \\ \hat{y}_{s,2} - \hat{y}_{s,4} \\ -\hat{y}_{s,1} - \hat{y}_{s,3} \\ -\hat{y}_{s,1} + \hat{y}_{s,3} \end{pmatrix},$$

Переходя к вектору среднеквадратичных флуктуаций, учитывая $\langle \delta \hat{y}_{s,k} \delta \hat{y}_{s,j} \rangle = \delta_{jk} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$, мы получаем

$$\langle \delta \hat{e}_{CZ,2}^2 \rangle = \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что в данном случае $||\langle \delta \hat{e}_{CZ,2}^2 \rangle||_\infty < ||\langle \delta \hat{e}_{CZ}^2 \rangle||_\infty < ||\langle \delta \hat{e}_{CZ,1}^2 \rangle||_\infty$. Это значит, что ошибка здесь имеет минимальное значение среди всех рассмотренных случаев. Более того, так как одномодовые преобразования, используемые в данной схеме, имеют минимальную ошибку, то рассмотрение других одномодовых преобразований заведомо даст худший результат.

Таким образом, для реализации как универсальных одномодовых преобразований, так и двухмодового преобразования CZ лучше всего использовать двухузловые кластерные состояния с дополнительными вращателями квадратур. Каждое такое элементарное преобразование выполняется с минимальной ошибкой, поэтому ошибка в полном преобразовании также будет минимальной. На Рис. 4.5 представлен пример того, как произвольная логическая схема вычислений может быть реализована физически с помощью двухузловых кластерных состояний.

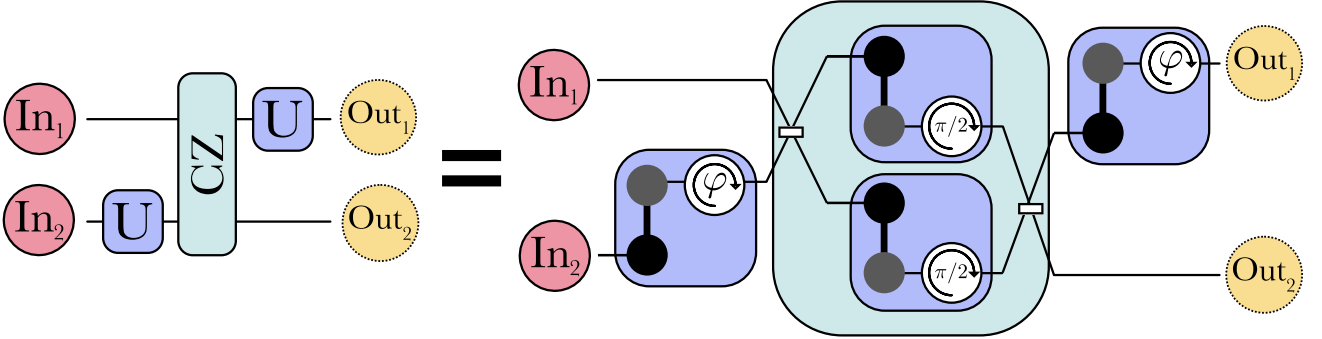


Рис. 4.5: На рисунке демонстрируется стратегия построения схемы однонаправленных вычислений, приводящая к минимальной ошибке вычислений. Представлена выбранная логическая схема (слева) и соответствующая ей оптимальная реализация (справа). Мы рассмотрели в качестве примера преобразование над двумя входными состояниями (In_1 и In_2), состоящее из двух одномодовых преобразований U и одного преобразования CZ . Вычисление реализуется с помощью двухузловых кластерных состояний и дополнительных вращателей фаз.

4.3 Заключение по главе 4

В этой главе мы исследовали подходы к оптимизации гауссовых вычислений на кластерных состояниях различных конфигураций по ошибке вычислений. Мы проанализировали ошибки, которые получаются при реализации универсальных одномодовых преобразований

и двухмодового преобразования CZ . При этом мы не ограничились однонаправленными вычислениями в традиционном смысле, когда на одном кластерном состоянии реализуется нужная операция. Мы рассмотрели кластерные состояния малых размеров, которые вместе со вспомогательными линейными элементами могут давать универсальные вычисления.

В результате мы получили, что применение смешанной техники – малых кластерных состояний с дополнительными линейными элементами – позволяет не только выполнить весь набор требуемых универсальных гауссовых преобразований, но и существенно снизить ошибку вычисления по сравнению с классическим кластерным подходом к однонаправленным вычислениям. Наилучший же результат получается при вычислении на двухузловых кластерных состояниях, дополненных вращателем квадратур. Вращатель квадратур на произвольный угол можно реализовать в эксперименте, например, с помощью обычного фазового модулятора, установленного в канале. Более того, при реализации преобразования CZ не нужно вращать квадратуры на произвольный угол, достаточно в каждый канал поставить стеклянную пластинку, которая будет совершать поворот на угол $\pi/2$.

Таким образом, для универсальных однонаправленных вычислений наилучшей стратегией вычислений будет та, в которой все одномодовые преобразования над входными состояниями выполняются на двухузловом кластерном состоянии с дополнительным фазовращателем, а двухмодовая операция CZ – на схеме, представленной на Рис. 4.1. В этом случае можно гарантированно утверждать, что ошибка при любых вычислениях будет минимальной, и ее будет легче всего скомпенсировать.

С экспериментальной точки зрения минимальность ошибки означает также, что для реализации вычислений в схеме с двухузловыми кластерными состояниями, дополненными вращателями квадратур, возможно использовать физические системы с меньшим сжатием. Например, если мы будем использовать данную схему для преобразований когерентных состояний и хотим обеспечить соотношение сигнал/шум равное десяти для результирующего состояния, то нам необходимо иметь квантовые осцилляторы со сжатием в 13 дБ. Свет с таким сжатием был экспериментально получен, например, в работе [118]. Если же для таких же преобразований мы будем использовать схему с четырехузловыми кластерными состояниями, то в этом случае нам нужно уже использовать осцилляторы со сжатием в 14.8 дБ. Такое значение намного труднее реализуется экспериментально. Более того, оно уже близко к рекордному на сегодня экспериментально продемонстрированному значению сжатия 15 дБ [17].

Заключение

В представленной работе мы исследовали однонаправленные квантовые вычисления в непрерывных переменных. Несмотря на то, что эта работа носит теоретический характер, она дает конкретные решения для проведения экспериментов. Так, например, информация из второй главы диссертации поможет ответить на вопрос о величине сжатия квантовых осцилляторов, необходимой для генерации кластерных состояний той или иной конфигурации. Кроме того, результаты этой главы помогут выяснить, какие кластерные состояния можно получить, имея в своем распоряжении тот или иной источник сжатых состояний.

Результаты следующей главы диссертации отвечают на вопрос о том, какое из квантовых преобразований может реализовать экспериментатор, имея в своем распоряжении кластерные состояния определенных конфигураций. Другими словами, результаты данной главы помогают оптимальным образом использовать ресурсы, имеющиеся у экспериментаторов. Помимо этого, из данной главы становится ясно, какие конфигурации кластерных состояний пригодны для универсальных вычислений.

Последняя глава дает стратегию оптимальной реализации универсальных гауссовых вычислений с минимальными ошибками. Результаты этой части диссертации могут помочь в экспериментальной реализации универсального квантового компьютера. Кроме того, важно отметить, что вся теория, построенная в диссертации, справедлива для любых физических систем, описываемых непрерывными переменными.

Как и любое научное исследование, данная работа не только дает ответы на поставленные автором вопросы, но и порождает новые. Так, например, возник вопрос о влиянии весовых коэффициентов кластерных состояний на результаты вычислений. Поскольку весовые коэффициенты являются дополнительными степенями свободы, они могут влиять, как на реализуемые преобразования, так и на получаемые ошибки. Кроме того, интересен вопрос о внедрении в рассмотренную оптимальную схему вычислений протокола коррекции ошибок. Все представленные вопросы будут исследованы нами в дальнейших работах.

Литература

1. Манин Ю.И. // Советское Радио. 1980. Т. 39, № 8. с. 128.
2. Feynman Richard P. Simulating physics with computers // International Journal of Theoretical Physics. 1982. Т. 21, № 6-7. С. 467–488.
3. Benioff P. Quantum mechanical hamiltonian models of turing machines // Journal of Statistical Physics. 1982. Т. 29, № 3.
4. Shor Peter W. Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer // SIAM J. Comput. Philadelphia, PA, USA, 1997. Oct. Т. 26, № 5. С. 1484–1509.
5. Grover Lov K. Quantum Mechanics Helps in Searching for a Needle in a Haystack // Phys. Rev. Lett. 1997. Т. 79. С. 325–328.
6. Toffoli Tommaso. Reversible computing // Automata, Languages and Programming / под ред. Jaco de Bakker, Jan van Leeuwen. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1980. С. 632–644.
7. Albash Tameem, Lidar Daniel A. Adiabatic quantum computation // Rev. Mod. Phys. 2018. Т. 90. с. 015002.
8. Kitaev A.Yu. Fault-tolerant quantum computation by anyons // Annals of Physics. 2003. Т. 303, № 1. С. 2 – 30.
9. Raussendorf Robert, Browne Daniel E., Briegel Hans J. Measurement-based quantum computation on cluster states // Phys. Rev. A. 2003. Т. 68. с. 022312.
10. Raussendorf Robert, Wei Tzu-Chieh. Quantum Computation by Local Measurement // Annual Review of Condensed Matter Physics. 2012. Т. 3, № 1. С. 239–261.
11. Raussendorf Robert, Briegel Hans J. A One-Way Quantum Computer // Phys. Rev. Lett. 2001. Т. 86. С. 5188–5191.
12. Nielsen Michael A. Cluster-state quantum computation // Reports on Mathematical Physics. 2006. Т. 57, № 1. С. 147 – 161.

13. Universal Quantum Computation with Continuous-Variable Cluster States / Nicolas C. Menicucci, Peter van Loock, Mile Gu [и др.] // Phys. Rev. Lett. 2006. T. 97. с. 110501.
14. Experimental one-way quantum computing / P. Walther, K. J. Resch, T. Rudolph [и др.] // Nature. 2005. T. 434, № 7030. С. 169–176.
15. Optical one-way quantum computing with a simulated valence-bond solid / Rainer Kaltenbaek, Jonathan Lavoie, Bei Zeng [и др.] // Nature Physics. 2010. T. 6, № 11. С. 850–854.
16. Quantum computation based on d-level cluster state / D. L. Zhou, B. Zeng, Z. Xu [и др.] // Phys. Rev. A. 2003. T. 68. с. 062303.
17. Detection of 15 dB Squeezed States of Light and their Application for the Absolute Calibration of Photoelectric Quantum Efficiency / Henning Vahlbruch, Moritz Mehmet, Karsten Danzmann [и др.] // Phys. Rev. Lett. 2016. T. 117. с. 110801.
18. Samuel J. Lomonaco Jr., Kauffman Louis H. Quantum Hidden Subgroup Problems: A Mathematical Perspective. 2002.
19. Cirac J. I., Zoller P. Quantum Computations with Cold Trapped Ions // Phys. Rev. Lett. 1995. T. 74. С. 4091–4094.
20. NMR Quantum Information Processing / Ivan S. Oliveira, S. Sarthour, Roberto, R. deAzevedo, Eduardo [и др.]. Elsevier, 2007.
21. Benchmarking Quantum Control Methods on a 12-Qubit System / C. Negrevergne, T. S. Mahesh, C. A. Ryan [и др.] // Phys. Rev. Lett. 2006. T. 96. с. 170501.
22. Experimental realization of Shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance / Lieven M. K. Vandersypen, Matthias Steffen, Gregory Breyta [и др.] // Nature. 2001. T. 414, № 6866. С. 883–887.
23. Rabi Oscillations in a Large Josephson-Junction Qubit / John M. Martinis, S. Nam, J. Aumentado [и др.] // Phys. Rev. Lett. 2002. T. 89. с. 117901.
24. Devoret M. H., Wallraff A., Martinis J. M. Superconducting Qubits: A Short Review // arXiv:cond-mat/0411174. 2004.
25. Loss Daniel, DiVincenzo David P. Quantum computation with quantum dots // Phys. Rev. A. 1998. T. 57. С. 120–126.
26. Knill E., Laflamme R., Milburn G. J. A scheme for efficient quantum computation with linear optics // Nature. 2001. T. 409, № 6816. С. 46–52.

27. Linear optical quantum computing with photonic qubits / Pieter Kok, W. J. Munro, Kae Nemoto [и др.] // *Rev. Mod. Phys.* 2007. Т. 79. С. 135–174.
28. Experimental Application of Decoherence-Free Subspaces in an Optical Quantum-Computing Algorithm / M. Mohseni, J. S. Lundeen, K. J. Resch [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Т. 91. с. 187903.
29. Deutsch David, Penrose Roger. Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer // *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences.* 1985. Т. 400, № 1818. С. 97–117.
30. Nielsen M.A., Chuang I. L. *Quantum Computation and Quantum Information.* Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
31. *Quantum Information with Continuous Variables* / под ред. Samuel L. Braunstein, Arun K. Pati. Springer Netherlands, 2003.
32. Experimental realization of Shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance. / L M Vandersypen, Matthias Steffen, Gregory Breyta [и др.] // *Nature.* 2001. Т. 414, № 6866. С. 883–887.
33. Quantum Factorization of 143 on a Dipolar-Coupling Nuclear Magnetic Resonance System / Nanyang Xu, Jing Zhu, Dawei Lu [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* 2012. Т. 108. с. 130501.
34. Adleman Leonard M. Molecular Computation of Solutions to Combinatorial Problems // *Science.* 1994. Т. 266, № 5187. С. 1021–1024.
35. Non-Abelian anyons and topological quantum computation / Chetan Nayak, Steven H. Simon, Ady Stern [и др.] // *Rev. Mod. Phys.* 2008. Т. 80. С. 1083–1159.
36. Adiabatic Quantum Computation is Equivalent to Standard Quantum Computation / Dorit. Aharonov, Wim. van Dam, Julia. Kempe [и др.] // *SIAM Journal on Computing.* 2007. Т. 37, № 1. С. 166–194.
37. Freedman Michael H., Larsen Michael, Wang Zhenghan. A Modular Functor Which is Universal for Quantum Computation // *Communications in Mathematical Physics.* 2002. Т. 227, № 3. С. 605–622.
38. Freedman Michael H., Kitaev Alexei, Wang Zhenghan. Simulation of Topological Field Theories by Quantum Computers // *Communications in Mathematical Physics.* 2002. Т. 227, № 3. С. 587–603.
39. Topological quantum computation / Michael H. Freedman, Alexei Kitaev, Michael J. Larsen [и др.] // *Bulletin of the American Mathematical Society.* 2002. Т. 40, № 1. С. 31–39.

40. Milne Darran F., Korolkova Natalia V., van Loock Peter. Universal quantum computation with continuous-variable Abelian anyons // *Phys. Rev. A*. 2012. T. 85. c. 052325.
41. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels / Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* 1993. T. 70. C. 1895–1899.
42. Vaidman Lev. Teleportation of quantum states // *Phys. Rev. A*. 1994. T. 49. C. 1473–1476.
43. Experimental quantum teleportation / Dik Bouwmeester, Jian-Wei Pan, Klaus Mattle [и др.] // *Nature*. 1997. T. 390, № 6660. C. 575–579.
44. Braunstein Samuel L., Kimble H. J. Teleportation of Continuous Quantum Variables // *Phys. Rev. Lett.* 1998. T. 80. C. 869–872.
45. Unconditional Quantum Teleportation / A. Furusawa, J. L. Sørensen, S. L. Braunstein [и др.] // *Science*. 1998. T. 282, № 5389. C. 706–709.
46. Einstein A., Podolsky B., Rosen N. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? // *Physical Review*. 1935. T. 47.
47. Aspect Alain, Grangier Philippe, Roger Gérard. Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem // *Phys. Rev. Lett.* 1981. T. 47. C. 460–463.
48. Aspect Alain, Dalibard Jean, Roger Gérard. Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers // *Phys. Rev. Lett.* 1982. T. 49. C. 1804–1807.
49. Gottesman Daniel, Chuang Isaac L. Demonstrating the viability of universal quantum computation using teleportation and single-qubit operations // *Nature*. 1999. T. 402, № 6760. C. 390–393.
50. Bartlett Stephen D., Munro William J. Quantum Teleportation of Optical Quantum Gates // *Phys. Rev. Lett.* 2003. T. 90. c. 117901.
51. Daniel M. Greenberger. GHZ (Greenberger-Horne-Zeilinger) Theorem and GHZ States // *Compendium of Quantum Physics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009. C. 258–263.
52. Entanglement in graph states and its applications / Hein M., Dür W., Eisert J. [и др.] // *Quantum Computers, Algorithms and Chaos* / под ред. G. Casati, D. L. Shepelyansky, P. Zoller [и др.]. IOS Press, 2006. T. 162. c. 115–218.
53. Elementary gates for quantum computation / Adriano Barenco, Charles H. Bennett, Richard Cleve [и др.] // *Phys. Rev. A*. 1995. T. 52. C. 3457–3467.
54. Lloyd Seth. Universal Quantum Simulators // *Science*. 1996. T. 273, № 5278. C. 1073–1078.

55. Universal quantum computer from a quantum magnet / Jianming Cai, Akimasa Miyake, Wolfgang Dür [и др.] // Phys. Rev. A. 2010. T. 82. c. 052309.
56. Generation of cluster states / Ping Dong, Zheng-Yuan Xue, Ming Yang [и др.] // Phys. Rev. A. 2006. T. 73. c. 033818.
57. Zou XuBo, Mathis W. Schemes for generating the cluster states in microwave cavity QED // Phys. Rev. A. 2005. T. 72. c. 013809.
58. Cho Jaeyoon, Lee Hai-Woong. Generation of Atomic Cluster States through the Cavity Input-Output Process // Phys. Rev. Lett. 2005. T. 95. c. 160501.
59. Zheng Shi-Biao. Generation of cluster states in ion-trap systems // Phys. Rev. A. 2006. T. 73. c. 065802.
60. One-way quantum computation with four-dimensional photonic qudits / Jaewoo Joo, Peter L. Knight, Jeremy L. O'Brien [и др.] // Phys. Rev. A. 2007. T. 76. c. 052326.
61. Yoran N., Reznik B. Deterministic Linear Optics Quantum Computation with Single Photon Qubits // Phys. Rev. Lett. 2003. T. 91. c. 037903.
62. Browne Daniel E., Rudolph Terry. Resource-Efficient Linear Optical Quantum Computation // Phys. Rev. Lett. 2005. T. 95. c. 010501.
63. Experimental Realization of One-Way Quantum Computing with Two-Photon Four-Qubit Cluster States / Kai Chen, Che-Ming Li, Qiang Zhang [и др.] // Phys. Rev. Lett. 2007. T. 99. c. 120503.
64. Holevo A. S. Gaussian optimizers and the additivity problem in quantum information theory // Russian Mathematical Surveys. 2015. T. 70, № 2. c. 331.
65. Sanders Barry C, Bartlett Stephen D., de Guise Hubert. From Qubits to Continuous-Variable Quantum Computation // arXiv:quant-ph/0208008. 2002.
66. van Loock Peter, Furusawa Akira. Detecting genuine multipartite continuous-variable entanglement // Phys. Rev. A. 2003. T. 67. c. 052315.
67. Inseparability Criterion for Continuous Variable Systems / Lu-Ming Duan, G. Giedke, J. I. Cirac [и др.] // Phys. Rev. Lett. 2000. T. 84. C. 2722–2725.
68. Clusters on the basis of bright multimode light in a mixed state / S. B. Korolev, K. S. Tikhonov, T. Yu. Golubeva [и др.] // Optics and Spectroscopy. 2017. T. 123, № 3. C. 411–418.
69. Lloyd Seth, Braunstein Samuel L. Quantum Computation over Continuous Variables // Phys. Rev. Lett. 1999. T. 82. C. 1784–1787.

70. Gottesman Daniel, Kitaev Alexei, Preskill John. Encoding a qubit in an oscillator // Phys. Rev. A. 2001. T. 64. c. 012310.
71. Filip Radim, Marek Petr, Andersen Ulrik L. Measurement-induced continuous-variable quantum interactions // Phys. Rev. A. 2005. T. 71. c. 042308.
72. Demonstration of a Quantum Nondemolition Sum Gate / Jun-ichi Yoshikawa, Yoshichika Miwa, Alexander Huck [и др.] // Phys. Rev. Lett. 2008. T. 101. c. 250501.
73. Leonhardt U. Measuring the Quantum State of Light. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
74. On mathematical and physical approaches to constructing a quantum cluster state in continuous variables, or is it possible to construct a cluster from different modes? / S. B. Korolev, E. A. Vashukevich, T. Yu. Golubeva [и др.] // Quantum Electronics. 2018. T. 48, № 10. C. 906–911.
75. Universal linear Bogoliubov transformations through one-way quantum computation / R. Ukai, J. Yoshikawa, N. Iwata [и др.] // Phys. Rev. A. 2010. T. 81. c. 032315.
76. Quantum computing with continuous-variable clusters / Mile Gu, Christian Weedbrook, Nicolas C. Menicucci [и др.] // Phys. Rev. A. 2009. T. 79. c. 062318.
77. Houhou Oussama, Aissaoui Habib, Ferraro Alessandro. Generation of cluster states in optomechanical quantum systems // Phys. Rev. A. 2015. T. 92. c. 063843.
78. hui Sun Li, qin Chen Yan, xiang Li Gao. Creation of four-mode weighted cluster states with atomic ensembles in high-Q ring cavities // Opt. Express. 2012. T. 20, № 3. C. 3176–3191.
79. Cluster State Generation with Quadrature Squeezed Cylindrically Polarized Modes / Christian Gabriel, Ioannes Rigas, Andrea Aiello [и др.] // Conference on Lasers and Electro-Optics 2012. Optical Society of America, 2012. c. JW4A.102.
80. Controlled Logic Gate Based on a Four-Node Linear Hybrid Cluster State / K. S. Tikhonov, A. D. Manukhova, S. B. Korolev [и др.] // Optics and Spectroscopy. 2019. T. 127, № 5. C. 878–887.
81. Milne Darran F., Korolkova Natalia V. Composite-cluster states and alternative architectures for one-way quantum computation // Phys. Rev. A. 2012. T. 85. c. 032310.
82. Ultracompact generation of continuous-variable cluster states / N. Menicucci, S. Flammia, H. Zaidi [и др.] // Phys. Rev. A. 2007. T. 76. c. 010302.
83. Menicucci N., Flammia S., Pfister O. One-Way Quantum Computing in the Optical Frequency Comb // Phys. Rev. Lett. 2008. T. 101. c. 130501.

84. Flammia S., Menicucci N., Pfister O. The optical frequency comb as a one-way quantum computer // Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics. 2009. T. 42, № 11. c. 114009.
85. Weaving quantum optical frequency combs into continuous-variable hypercubic cluster states / Pei Wang, Moran Chen, Nicolas C. Menicucci [и др.] // Phys. Rev. A. 2014. T. 90. c. 032325.
86. R. Shahrokhshahi, O. Pfister, E Polzik. Large-scale multipartite entanglement in the quantum optical frequency comb of a depleted-pump optical parametric oscillator // Quantum Information and Computation. 2012. T. 12, № 11. C. 953–969.
87. Chen Moran, Menicucci Nicolas C., Pfister Olivier. Experimental Realization of Multipartite Entanglement of 60 Modes of a Quantum Optical Frequency Comb // Phys. Rev. Lett. 2014. T. 112. c. 120505.
88. Parallel Generation of Quadripartite Cluster Entanglement in the Optical Frequency Comb / Pysher M., Miwa Y., Shahrokhshahi R. [и др.] // Phys. Rev. Lett. 2011. T. 107. c. 030505.
89. One-way quantum computing with arbitrarily large time-frequency continuous-variable cluster states from a single optical parametric oscillator / Rafael N. Alexander, Pei Wang, Niranjana Sridhar [и др.] // Phys. Rev. A. 2016. T. 94. c. 032327.
90. Experimental generation of four-mode continuous-variable cluster states / Yukawa M., Ukai R., van Loock P. [и др.] // Phys. Rev. A. 2008. T. 78. c. 012301.
91. Zhang Jing, Braunstein Samuel L. Continuous-variable Gaussian analog of cluster states // Phys. Rev. A. 2006. T. 73. c. 032318.
92. Menicucci Nicolas C. Temporal-mode continuous-variable cluster states using linear optics // Phys. Rev. A. 2011. T. 83. c. 062314.
93. Demonstration of Unconditional One-Way Quantum Computations for Continuous Variables / Ryuji Ukai, Noriaki Iwata, Yuji Shimokawa [и др.] // Phys. Rev. Lett. 2011. T. 106. c. 240504.
94. van Loock P., C. Weedbrook, M. Gu. Building Gaussian cluster states by linear optics // Phys. Rev. A. 2007. T. 76. c. 032321.
95. Ultra-large-scale continuous-variable cluster states multiplexed in the time domain / S. Yokoyama, R. Ukai, S. C. Armstrong [и др.] // Nature Photonics. 2013. T. 7. C. 982–986.
96. Menicucci, C. Nicolas. Temporal-mode continuous-variable cluster states using linear optics // Phys. Rev. A. 2011. T. 83. c. 062314.

97. Generation of time-domain-multiplexed two-dimensional cluster state / Warit Asavanant, Yu Shiozawa, Shota Yokoyama [и др.] // Science. 2019. Т. 366, № 6463. С. 373–376.
98. Compact Gaussian quantum computation by multi-pixel homodyne detection / G Ferrini, J P Gazeau, T Coudreau [и др.] // New Journal of Physics. 2013. sep. Т. 15, № 9. с. 093015.
99. Full characterization of a highly multimode entangled state embedded in an optical frequency comb using pulse shaping / R. Medeiros de Araújo, J. Roslund, Y. Cai [и др.] // Phys. Rev. A. 2014. Т. 89. с. 053828.
100. Multimode entanglement in reconfigurable graph states using optical frequency combs / Y. Cai, J. Roslund, G. Ferrini [и др.] // Nature Communications. 2017. Т. 8, № 1. с. 15645.
101. Прескилл Дж. Квантовая информатика и квантовые вычисления. Том 2. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2011.
102. Gottesman Daniel. Class of quantum error-correcting codes saturating the quantum Hamming bound // Phys. Rev. A. 1996. Т. 54. С. 1862–1868.
103. Joo Jaewoo, Feder David L. Error-correcting one-way quantum computation with global entangling gates // Phys. Rev. A. 2009. Т. 80. с. 032312.
104. Niset Julien, Fiurášek Jaromír, Cerf Nicolas J. No-Go Theorem for Gaussian Quantum Error Correction // Phys. Rev. Lett. 2009. Т. 102. с. 120501.
105. Vasconcelos H. M., Sanz L., Glancy S. All-optical generation of states for «Encoding a qubit in an oscillator» // Opt. Lett. 2010. Т. 35, № 19. С. 3261–3263.
106. Eaton Miller, Nehra Rajveer, Pfister Olivier. Non-Gaussian and Gottesman-Kitaev-Preskill state preparation by photon catalysis // New Journal of Physics. 2019. Т. 21, № 11. с. 113034.
107. Glancy S., Knill E. Error analysis for encoding a qubit in an oscillator // Phys. Rev. A. 2006. Т. 73. с. 012325.
108. Menicucci Nicolas C. Fault-Tolerant Measurement-Based Quantum Computing with Continuous-Variable Cluster States // Phys. Rev. Lett. 2014. Т. 112. с. 120504.
109. Robust fault tolerance for continuous-variable cluster states with excess antisqueezing / Blayney W. Walshe, Lucas J. Mensen, Ben Q. Baragiola [и др.] // Phys. Rev. A. 2019. Т. 100. с. 010301.
110. Criteria of minimum squeezing for quantum cluster state generation / S. B. Korolev, A. D. Manukhova, K. S. Tikhonov [и др.] // Laser Physics Letters. 2018. Т. 15, № 7. с. 075203.

111. Bogoljubov N. N. On a new method in the theory of superconductivity // *Il Nuovo Cimento*. 1958. T. 7, № 6. C. 794–805.
112. Optimization of networks for measurement-based quantum computation / G. Ferrini, J. Roslund, F. Arzani [и др.] // *Phys. Rev. A*. 2015. T. 91. c. 032314.
113. Ukai Ryuji. *Multi-Step Multi-Input One-Way Quantum Information Processing with Spatial and Temporal Modes of Light*. Springer Japan, 2015.
114. Braunstein Samuel L. Squeezing as an irreducible resource // *Phys. Rev. A*. 2005. T. 71. c. 055801.
115. Korolev S. B., Golubeva T. Yu., Golubev Yu. M. Finding the optimal cluster state configuration. Cluster states classification by type of computations // *Laser Physics Letters*. 2020. T. 17, № 3. c. 035207.
116. Korolev S B, Golubeva T Yu, Golubev Yu M. Finding the optimal cluster state configuration. Minimization of one-way quantum computation errors // *Laser Physics Letters*. 2020. T. 17, № 5. c. 055205.
117. Quantum computations on the ensemble of two-node cluster states obtained by sub-Poissonian lasers / S. B. Korolev, A. N. Dobrotvorskaia, T. Yu. Golubeva [и др.] // *Laser Physics Letters*. 2019. T. 16, № 7. c. 075204.
118. Schönbeck Axel, Thies Fabian, Schnabel Roman. 13 dB squeezed vacuum sttes at 1550 nm from 12 mW extrnal pump power at 775 nm // *Opt. Lett.* T. 43, № 1. C. 110–113.

Приложение А

Независимость ошибок вычислений от способа генерации кластерного состояния

Из выражения (3.14) мы видим, что вектор ошибок, связанных с неидеальностью сжатия используемых осцилляторов, может быть записан в виде

$$\hat{\vec{e}} = Z \cdot \hat{\vec{y}}_r, \quad (\text{A.1})$$

где Z – это некоторая матрица, зависящая от матрицы смежности и от фаз локальных осцилляторов гомодинных детекторов. Эта форма записи справедлива и для других случаев однонаправленных вычислений на непрерывных переменных ((3.33), (3.40), (3.58), (3.67) и (3.71)), поскольку связана с переходом от векторов $\hat{\vec{x}}_s$ и $\hat{\vec{y}}_s$ к векторам $\hat{\vec{x}}_r = \text{Re } U \hat{\vec{x}}_s$ и $\hat{\vec{y}}_r = \text{Re } U \hat{\vec{y}}_s$ в выражении (3.3).

Воспользовавшись соотношением $\text{Re } U = (I + A^2)^{-1/2} Q$, полученным нами на стр. 36, перепишем вектор ошибок (A.2) в виде

$$\hat{\vec{e}} = Z (I + A^2)^{-1/2} Q \cdot \hat{\vec{y}}_s \equiv Z' Q \cdot \hat{\vec{y}}_s. \quad (\text{A.2})$$

Для оценки ошибок вычислений необходимо перейти от операторов к их среднеквадратичным флуктуациям. Среднеквадратичные флуктуации элемента вектора $\hat{\vec{e}}$ можно записать в виде

$$\langle \delta \hat{e}_j^2 \rangle = \left\langle \left(\sum_{k=1}^n z'_{jk} \sum_{p=1}^n q_{kp} \delta \hat{y}_{s,p} \right)^2 \right\rangle. \quad (\text{A.3})$$

где z'_{jk} – элементы матрицы Z' , а q_{kp} – элементы матрицы Q . Воспользовавшись свойством статистической независимости квантовых осцилляторов ($\langle \delta \hat{y}_{s,i} \delta \hat{y}_{s,j} \rangle = \delta_{ij} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$) мы можем переписать данное выражение в виде

$$\langle \delta \hat{e}_j^2 \rangle = \left\langle \left(\sum_{k=1}^n z'_{jk} \sum_{p=1}^n q_{kp} \delta \hat{y}_{s,p} \right)^2 \right\rangle = \sum_{p=1}^n \left(\sum_{k=1}^n z'_{jk} q_{kp} \right)^2 \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle. \quad (\text{A.4})$$

Раскрыв скобки, а также используя свойство ортогональности матрицы Q и (4.26), (2.17), мы можем записать окончательное выражение для среднеквадратичных флуктуаций элементов вектора ошибок в виде

$$\langle \delta \hat{e}_j^2 \rangle = \sum_{k=1}^n (z'_{jk})^2 \langle \delta y_s^2 \rangle. \quad (\text{A.5})$$

Полученное выражение не зависит от матрицы Q . То есть ошибки, получаемые при однонаправленных вычислениях, не будут зависеть от способа генерации кластерного состояния. Они, также как и сами вычисления зависят лишь от конфигурации кластера и от фаз локальных осцилляторов, используемых при гомодинных измерениях.

Приложение В

Формулы Фробениуса

Первая формула Фробениуса используется при условии существования матрицы M_{11}^{-1}

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} M_{11}^{-1} + M_{11}^{-1} M_{12} H^{-1} M_{21} M_{11}^{-1} & -M_{11}^{-1} M_{12} H^{-1} \\ -H^{-1} M_{21} M_{11}^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

где $H = M_{22} - M_{21} M_{11}^{-1} M_{12}$.

Вторая формула Фробениуса используется при существовании матрицы M_{22}^{-1}

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} H_1^{-1} & -H_1^{-1} M_{12} M_{22}^{-1} \\ -M_{22}^{-1} M_{21} H_1^{-1} & M_{22}^{-1} + M_{22}^{-1} M_{21} H_1^{-1} M_{12} M_{22}^{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

где $H_1 = M_{11} - M_{12} M_{22}^{-1} M_{21}$.

Приложение С

Решение системы уравнений для случая вычислений, когда входные состояния примешиваются к измеряемым узлам кластера ($n = 2m$)

Проводя действия, описанные в разделе 3.4, мы получаем связь входных и выходных квадратур в виде

$$\begin{pmatrix} \hat{\vec{X}}_{out} \\ \hat{\vec{Y}}_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{12}^{-1} & A_{12}^{-1}A_{11} \\ -A_{22}A_{12}^{-1} & A_{22}A_{12}^{-1}A_{11} - A_{12}^T \end{pmatrix} \Phi(\Theta_+, \Theta_-) \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -A_{12}^{-1} & \mathbf{O}_{m \times m} \\ -A_{22}A_{12}^{-1} & I_m \end{pmatrix} (A^2 + I_n) \hat{\vec{y}}_r, \quad (\text{C.1})$$

где $\Theta_{\pm} = \Theta \pm \Theta_{in}$, а матрица $\Phi(\Theta_+, \Theta_-)$ имеет следующий вид:

$$\Phi(\Theta_+, \Theta_-) = \begin{pmatrix} \cos \Theta_- + \cos \Theta_+ & \sin \Theta_+ \\ -\sin \Theta_+ & \cos \Theta_+ - \cos \Theta_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \csc \Theta_- & \mathbf{O}_{m \times m} \\ \mathbf{O}_{m \times m} & \csc \Theta_- \end{pmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

В полученном выражении (C.1) мы воспользовались следующим соотношением

$$\begin{pmatrix} A_{11}^2 + A_{12}A_{12}^T + I_m & A_{11}A_{12} + A_{12}A_{22} \\ A_{12}^TA_{11} + A_{22}A_{12}^T & A_{12}^TA_{12} + A_{22}^2 + I_m \end{pmatrix} = A^2 + I_n. \quad (\text{C.3})$$

Для наглядности давайте разложим матрицу преобразования в (C.1) на произведение матриц простейших преобразований. Начнем сперва с матрицы, которая зависит лишь от весовых коэффициентов кластерного состояния

$$\begin{pmatrix} -A_{12}^{-1} & A_{12}^{-1}A_{11} \\ -A_{22}A_{12}^{-1} & A_{22}A_{12}^{-1}A_{11} - A_{12}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & \mathbf{O}_{m \times m} \\ A_{22} & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A_{12}^{-1} & \mathbf{O}_{m \times m} \\ \mathbf{O}_{m \times m} & -A_{12}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & -A_{11} \\ \mathbf{O}_{m \times m} & I_m \end{pmatrix}. \quad (\text{C.4})$$

Для матрицы $\Phi(\Theta_+, \Theta_-)$ разложение Блоха-Мессиа [114] запишется следующим образом

$$\Phi(\Theta_+, \Theta_-) = R\left(-\frac{1}{2}\Theta_+\right) S\left(\ln\left[\tan\frac{1}{2}\Theta_-\right]\right) R\left(-\frac{1}{2}\Theta_+\right) \quad (\text{C.5})$$

Воспользовавшись этими разложениями можно переписать преобразование (C.1) в виде простейших преобразований

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{X}_{out} \\ \hat{Y}_{out} \end{pmatrix} &= CZ[A_{22}] \begin{pmatrix} -A_{12}^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -A_{21} \end{pmatrix} R\left(-\frac{\pi}{2}I_m\right) CZ[A_{11}] R\left(\frac{\pi}{2}I_m\right) R\left(-\frac{1}{2}\Theta_+\right) * \\ &* S\left(\ln\left[\tan\frac{1}{2}\Theta_-\right]\right) R\left(-\frac{1}{2}\Theta_+\right) \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -A_{12}^{-1} & \mathbb{O} \\ -A_{22}A_{12}^{-1} & I_m \end{pmatrix} (A^2 + I_n) \hat{\vec{y}}_r, \quad (\text{C.6}) \end{aligned}$$

где $CZ[M]$ – матрица преобразования CZ , задаваемая выражением (3.17), $S(\mathbf{r})$ – матрица многомодового преобразования сжатия (3.24), матрица $R(\Theta)$ – многомодовая матрица поворота, задаваемая выражением (3.59).

Приложение D

Вид матрицы ошибок для случая вычислений $n > 2m$. Первый случай обращения матрицы M

Матрица ошибок E имеет следующие блочные элементы

$$[E]_{11} = - (K_1 A_{23}^T + I_m) A_{12}^{-1} - (K_1 K_2 + A_{12}^{-1} A_{11}) A_{11} - A_{12}^{-1} A_{13} \tilde{H}^{-1} \cos \Theta_3 A_{13}^T - A_{12}^T, \quad (D.1)$$

$$[E]_{12} = - (K_1 K_2 + A_{12}^{-1} A_{11}) A_{12} - A_{12}^{-1} A_{13} \tilde{H}^{-1} \cos \Theta_3 A_{23}^T - A_{22}, \quad (D.2)$$

$$[E]_{13} = - (K_1 K_2 + A_{12}^{-1} A_{11}) A_{13} + A_{12}^{-1} A_{13} \tilde{H}^{-1} (\sin \Theta_3 - \cos \Theta_3 A_{33}) - A_{23}, \quad (D.3)$$

$$[E]_{21} = A_{12}^T A_{11} + A_{23} \left(\tilde{H}^{-1} \sin \Theta_3 [A_{23} A_{12}^{-1} + K_2 A_{11}] + \tilde{H}^{-1} \cos \Theta_3 A_{13}^T \right) + \quad (D.4)$$

$$+ A_{22} \left(- (K_1 A_{12} + I_m) A_{12}^{-1} - (K_1 K_2 + A_{12}^{-1} A_{11}) A_{11} - A_{12}^{-1} A_{13} \tilde{H}^{-1} \cos \Theta_3 A_{13}^T \right), \quad (D.5)$$

$$[E]_{22} = I_m + A_{12}^T A_{12} + A_{22} \left(- (K_1 K_2 + A_{12}^{-1} A_{11}) A_{12} - A_{12}^{-1} A_{13} \tilde{H}^{-1} \cos \Theta_3 A_{23}^T \right) + \quad (D.6)$$

$$+ A_{23} \left(\tilde{H}^{-1} \sin \Theta_3 K_2 A_{12} + \tilde{H}^{-1} \cos \Theta_3 A_{23}^T \right), \quad (D.7)$$

$$[E]_{23} = A_{12}^T A_{13} + A_{22} \left(- (K_1 K_2 + A_{12}^{-1} A_{11}) A_{13} + A_{12}^{-1} A_{13} \tilde{H}^{-1} (\sin \Theta_3 - \cos \Theta_3 A_{33}) \right) + \quad (D.8)$$

$$+ A_{23} \left(\tilde{H}^{-1} \sin \Theta_3 K_2 A_{13} + \tilde{H}^{-1} (\cos \Theta_3 A_{33} - \sin \Theta_3) \right), \quad (D.9)$$

Приложение Е

Вид матрицы ошибок для случая вычислений $n > 2m$. Второй случай обращения матрицы M

Блочные элементы матрицы ошибок $\tilde{E}$ имеют следующий вид

$$\left[\tilde{E} \right]_{11} = -\tilde{K}_2^{-1} \tilde{K}_1 A_{11} - \tilde{K}_2^{-1} A_{13} \tilde{D}^{-1} \cos \Theta_3 A_{13}^T - \tilde{K}_2^{-1} - A_{12}^T, \quad (\text{E.1})$$

$$\left[\tilde{E} \right]_{12} = -\tilde{K}_2^{-1} \tilde{K}_1 A_{12} - \tilde{K}_2^{-1} A_{13} \tilde{D}^{-1} \cos \Theta_3 A_{23}^T - A_{22}, \quad (\text{E.2})$$

$$\left[\tilde{E} \right]_{13} = -\tilde{K}_2^{-1} \tilde{K}_1 A_{13} + \tilde{K}_2^{-1} A_{13} \tilde{D}^{-1} (\sin \Theta_3 - \cos \Theta_3 A_{33}) - A_{23}, \quad (\text{E.3})$$

$$\left[\tilde{E} \right]_{21} = A_{12}^T A_{11} - A_{22} \tilde{K}_2^{-1} \left(\tilde{K}_1 A_{11} + A_{13} \tilde{D}^{-1} \cos \Theta_3 A_{13}^T + I_m \right) + \quad (\text{E.4})$$

$$+ A_{23} \tilde{D}^{-1} \left(\sin \Theta_3 A_{23}^T \tilde{K}_2 - \sin \Theta_3 \tilde{K}_3 A_{11} + \left(I_l + \sin \Theta_3 A_{23}^T \tilde{K}_2^{-1} A_{13} \tilde{D}^{-1} \right) \cos \Theta_3 A_{13}^T \right), \quad (\text{E.5})$$

$$\left[\tilde{E} \right]_{22} = I_m + A_{12}^T A_{12} - A_{22} \tilde{K}_2^{-1} \left(\tilde{K}_1 A_{12} + A_{13} \tilde{D}^{-1} \cos \Theta_3 A_{23}^T \right) - \quad (\text{E.6})$$

$$- A_{23} \tilde{D}^{-1} \left(\sin \Theta_3 \tilde{K}_3 A_{12} - \left(I_l + \sin \Theta_3 A_{23}^T \tilde{K}_2^{-1} A_{13} \tilde{D}^{-1} \right) \cos \Theta_3 A_{23}^T \right), \quad (\text{E.7})$$

$$\left[\tilde{E} \right]_{23} = A_{12}^T A_{13} + A_{22} \tilde{K}_2^{-1} \left(\tilde{K}_1 A_{13} - A_{13} \tilde{D}^{-1} (\sin \Theta_3 - \cos \Theta_3 A_{33}) \right) - \quad (\text{E.8})$$

$$- A_{23} \tilde{D}^{-1} \left(\sin \Theta_3 \tilde{K}_3 A_{13} + \left(I_l + \sin \Theta_3 A_{23}^T \tilde{K}_2^{-1} A_{13} \tilde{D}^{-1} \right) (\sin \Theta_3 - \cos \Theta_3 A_{33}) \right), \quad (\text{E.9})$$

Приложение F

Матрицы ошибок, получаемые в результате реализации одномодовых преобразований на четырехузловых кластерных состояниях

Матрицы ошибок, получаемых при реализации одномодовых преобразований на четырехузловых кластерных состояниях имеют вид:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 3 \cot \Theta_4 & \cot \Theta_4 & -1 - 2 \cot \Theta_4 \tan \Theta_3 & -3 - \cot \Theta_4 \tan \Theta_3 \\ -2 & 1 & 2 \tan \Theta_3 & \tan \Theta_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{F.1})$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 2 \cot \Theta_3 & \cot \Theta_3 & -3 & -1 \\ -2 \cot \Theta_3 \tan \Theta_4 - 1 & 2 - \cot \Theta_3 \tan \Theta_4 & 2 \tan \Theta_4 & -\tan \Theta_4 \end{pmatrix}, \quad (\text{F.2})$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 - 2 \cot \Theta_3 \cot \Theta_4 & \cot \Theta_3 & 3 \cot \Theta_3 & -2 - \cot \Theta_3 \cot \Theta_4 \\ 2 \cot \Theta_4 & 1 & -2 & \cot \Theta_4 \end{pmatrix}, \quad (\text{F.3})$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} -3 & \tan \Theta_3 & 2 \tan \Theta_3 & -1 \\ 2 \tan \Theta_4 & 3 - \tan \Theta_3 \tan \Theta_4 & 1 - 2 \tan \Theta_3 \tan \Theta_4 & -\tan \Theta_4 \end{pmatrix}, \quad (\text{F.4})$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} \tan \Theta_3 \tan \Theta_4 - 3 & 2 \tan \Theta_4 & 3 \tan \Theta_4 & -\tan \Theta_3 \tan \Theta_4 - 2 \\ \tan \Theta_3 & 3 & 2 & -\tan \Theta_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{F.5})$$

Приложение G

Общий вид разложения Блоха-Мессиа для матриц (3.80)-(3.84)

Разложение Блоха-Мессиа, полученное нами для матриц (3.80)-(3.84), выглядит следующим образом:

$$\tilde{U}_j = R\left(-\frac{\pi}{2} \cdot l + \varphi_1\right) S(r) R\left(\varphi_2 - \frac{\pi}{2} \cdot p - \Theta_+\right), \quad j = 1, \dots, 5. \quad (\text{G.1})$$

Здесь l равно единице при $j \in \{2, 4\}$ и равно нулю в противном случае; p равно единице при $j \in \{1, 4\}$ и нулю для остальных j . Такие разложение получается при $\Theta_- = \pi/2$ и

$$\varphi_2 = \arctan \left[\frac{r \left(\csc^3 \varphi_1 \sqrt{\sin^2 \varphi_1 (r^4 \cos^2 \varphi_1 - r^2 + \sin^2 \varphi_1)} - r \cot \varphi_1 \right)}{r^2 \csc^2 \varphi_1 - 1} \right] \quad (\text{G.2})$$

$$\{\tan \Theta_3, \cot \Theta_3\} = \frac{\csc \varphi_1 \sqrt{\sin^2 \varphi_1 (r^4 \cos^2 \varphi_1 - r^2 + \sin^2 \varphi_1)}}{r}, \quad (\text{G.3})$$

$$\{\tan \Theta_4, \cot \Theta_4\} = \frac{2(r^4 - 1) \cot \varphi_1 + \sqrt{2} r \csc^3 \varphi_1 \sqrt{(r^2 - 1) \sin^2 \varphi_1 ((r^2 + 1) \cos(2\varphi_1) + r^2 - 1)}}{2r^4 \cot^2 \varphi_1 + 2}, \quad (\text{G.4})$$

где выбор функции $\tan$ или $\cot$ зависит от номера преобразования j .