

Санкт-Петербургский государственный университет

Физический факультет

Ю.М. Голубев, И.В. Соколов, Т.Ю. Голубева и
Д.А. Иванов

Проблемы квантовой оптики.

Часть 2:

Теория субпуассоновского
лазера

Методическое пособие к курсу лекций
"Проблемы квантовой оптики"

Санкт-Петербург
2006

Утверждено
Методическим Советом физического факультета.

Составители:
проф. каф. Общей Физики 1
Голубев Юрий Михайлович;

проф. каф. Общей Физики 1
Соколов Иван Вадимович;

ст. преп. каф. Молекулярной биофизики
Голубева Татьяна Юрьевна;

ассистент каф. Общей Физики 1
Иванов Денис Анатольевич

Рецензент
Машек Игорь Чеславович, проф., д-р физ-матем. наук.

Глава 1

Введение

1.1 О методах теоретического описания в квантовой оптике

В квантовой теории лазера до недавнего времени заметное предпочтение отдавалось методу кинетического уравнения (the master equation method) для матрицы плотности поля генерации. По-видимому, наибольшее влияние здесь оказал анализ предпринятый Лэмбом и Скалли (изложение их оригинальной работы, выполненной в 1967 г., может быть найдено в книге [1]). Уже много позднее в 1984 г., когда стали активно изучаться квантовые проявления в электромагнитном излучении, была предложена теория субпуассоновского лазера [2], которая в значительной мере опиралась подходы, развитые Лэмбом и Скалли.

Несмотря на то, что метод кинетического уравнения вполне продемонстрировал свои возможности как эффективный инструмент квантовой оптики, тем не менее с самого начала были ясны ограниченные возможности для его применения. Например, он плохо применим или даже совершенно непригоден для описания работы целого класса систем, в которых существенны пространственные аспекты или полевые компоненты развиваются достаточно быстро в сравнении с атомными, например, как в твердотельных (включая полупроводниковые) лазерах.

Серьезный сдвиг в теоретической квантовой оптике был связан с осознанием того, что система с затуханием может быть описана в терминах гейзенберговских операторов. Постепенно созрело понимание того, что, например, в полуклассической теории в уравнениях, записанных для с-

числовых амплитуд поля, заселенностей атомных уровней и поляризацій атомных переходов, можно просто заменить s -числовые переменные на соответствующие гейзенберговы операторы, но с непременным добавлением операторных неоднородных членов (источников флуктуаций). Подобные уравнения теперь принято называть уравнениями Гейзенберга-Ланжевена. Обоснование этого метода, описание способов построения корреляционных функций для источников шумов может быть найдено в работах [3, 4] или в книге [1].

Хотя, как мы продемонстрируем в последующих разделах, теория в форме уравнений Гейзенберга-Ланжевена позволяет относительно просто предсказывать результаты любой измерительной процедуры, тем не менее формулирование теории в операторном виде часто встречает психологическое отторжение и желание переформулировать теорию в приемлемой s -числовой форме. Для этого применяется принцип соответствия, согласно которому нормально упорядоченное произведение операторов под знаком усреднения может быть заменено на произведение соответствующих s -числовых функции. Применяя этот принцип, мы сможем записать так называемые уравнения Ланжевена, которые внешне очень похожи на уравнения Гейзенберга-Ланжевена и отличаются от них в двух отношениях. Во-первых, они записываются не для операторных, а для s -числовых переменных (убраны "шляпки") и, во-вторых, переформулированы корреляционные функции для источников, которые теперь s -числовые случайные функции времени.

Здесь важно подчеркнуть то обстоятельство, что переход к уравнениям Ланжевена вовсе не означает, что мы вышли за рамки квантовой механики. Ситуация здесь в какой-то мере аналогична той, которая возникает, когда мы в квантовой электродинамике переходим к глауберовскому (или любому другому) диагональному представлению.

В этой связи необходимо вспомнить, что термин "уравнение Ланжевена" встречался уже раньше, например, для описания диффузии материальных частиц [5] или для введения статистического аспекта в полуклассическую теорию лазера [6]. Для этого в известные классические или полуклассические уравнения вставлялся "руками" неоднородный член - источник Ланжевена, свойства которого определялись на основе каких-то дополнительных соображений, например, на основе флуктуационно-диссипационной теоремы. Вот эти классические уравнения со стохастическими источниками были изначально названы уравнениями Ланжевена, хотя, как понятно, они не могли иметь никакого отношения к кван-

товым эффектам.

Еще один фактор, который необходимо отметить. Совершенно очевидно, что теория в форме уравнений Ланжевена не является столь же общей, как теория в форме уравнений Гейзенберга-Ланжевена, поскольку не допускает в принципе возможности вычисления средних неупорядоченных нормально произведенных операторов. Уравнения Ланжевена возможно использовать только тогда, когда есть полная уверенность в том, что интересующие нас измерительные процедуры связаны с расчетом средних только нормально упорядоченных операторных произведений.

1.2 Исходная математическая модель лазера

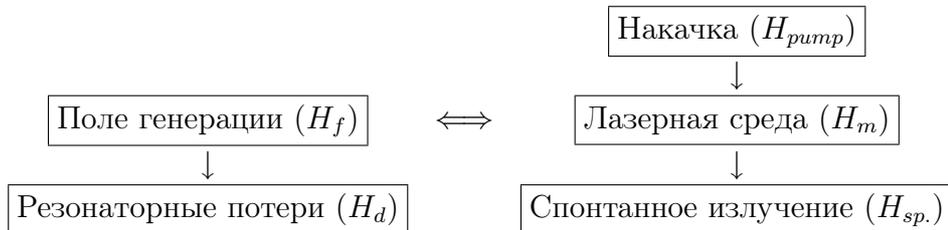
Простейший лазер состоит из следующих элементов (см. блок-схему):

Два основных объекта

-поле генерации внутри резонатора, являющееся в нашем исследовании и в традиционных экспериментах основным элементом исследований (H_f)

-активная среда, обеспечивающая возникновение в резонаторе поля генерации (H_m)

эффективно обмениваются друг с другом энергией, формируя лазерную генерацию и стационарное состояние активной среды.



Вспомогательные (но принципиально важные) объекты

-система, обеспечивающая возбуждение активной среды на лазерный переход (H_{pump})

-вакуум электромагнитного поля, обеспечивающий спонтанный распад лазерного перехода активной среды ($H_{sp.}$)

-система, обеспечивающая конечное время жизни фотона в резонаторе, обеспечивающая распад внутрирезонаторного поля генерации (например, за счет ухода через полупрозрачное зеркало) (H_d)

также, разумеется, участвуют в указанном процессе образования стационарных состояний поля генерации и активной среды.

Пусть \hat{F} —есть матрица плотности всей лазерной системы. Поскольку это замкнутая система, мы можем написать следующее:

$$\dot{\hat{F}} = -i [H_0 + V, \hat{F}] \quad (1.1)$$

Здесь

$$H_0 = H_f + H_m + H_{pump} + H_{sp.} + H_d. \quad (1.2)$$

полный гамильтониан свободных подсистем и

$$V = V_{f-m} + V_{pump-m} + V_{m-sp.} + V_{f-d} \quad (1.3)$$

включает в себя всевозможные взаимодействия.

Уравнение (1.1) может быть переписано в представлении взаимодействия:

$$\dot{\hat{F}}_I = -i [V_I, \hat{F}_I] \quad (1.4)$$

где индекс матрицы и гамильтониана взаимодействия указывает на представление взаимодействия.

Решая уравнение (1.4), мы, в принципе, можем получить любую информацию о любой из подсистем. Однако, это явно избыточная информация. Мы будем стремиться построить уравнение для одной только подсистемы, а именно, для матрицы плотности поля генерации:

$$\dot{\hat{\rho}} = Sp_1 \hat{F}_I \quad (1.5)$$

Здесь шпур берется по всем подсистемам, кроме поля генерации. Нетрудно понять, что точного уравнения для любой подсистемы быть не может. Действительно, проведение операции Sp_1 впрямую в уравнении (1.4) невозможно.

Полагая, что согласно вышеприведенной блок-схеме лазера полевой осциллятор взаимодействует только с активной средой и резонатором, мы можем написать, что

$$\dot{\hat{\rho}} = \left(\dot{\hat{\rho}} \right)_{matter} + \left(\dot{\hat{\rho}} \right)_{decay}. \quad (1.6)$$

Оба слагаемых справа могут рассчитываться совершенно независимо друг от друга, то-есть и в отсутствие друг друга. Как известно (см. Часть 1 этого методического пособия),

$$\left(\dot{\hat{\rho}} \right)_{decay} = -C/2(a^\dagger a \hat{\rho} + \hat{\rho} a^\dagger a - 2a \hat{\rho} a^\dagger), \quad (1.7)$$

где численный коэффициент C определяет скорость выхода фотонов из резонатора и спектральную модовую ширину.

1.3 Марковские процессы

Далеко не всегда можно рассчитывать на то, что для подсистемы возможно построить замкнутое уравнение. Достаточным условием является то, что все физические параметры, описывающие большую систему, могут быть разделены на две группы: одни из них быстро меняющиеся во времени, а другие—медленно меняющиеся. Тогда для медленных параметров может быть, в принципе, построено замкнутое уравнение. Действительно, пусть

$$X = x_1, x_2, x_3, \dots \quad (1.8)$$

набор медленных параметров, скорость изменения которых характеризует так называемое время релаксации X -подсистемы τ_r , и

$$Y = y_1, y_2, y_3, \dots \quad (1.9)$$

набор быстрых переменных с характерным временным параметром τ_c , определяющим время установления стационарного состояния в отношении быстрых переменных. Итак, мы требуем, что

$$\tau_c \ll \tau_r \quad (1.10)$$

то-есть медленные параметры развиваются гораздо медленнее быстрых. Очевидно, в общем случае

$$\dot{X} = f(X, Y) \quad \dot{Y} = g(X, Y) \quad (1.11)$$

Рассматривая достаточно большие временные интервалы, что уже наступают стационарные условия для быстрых переменных, но медленные еще не успевают измениться заметным образом:

$$\tau_c \ll t \ll \tau_r \quad (1.12)$$

сможем записать

$$\dot{Y} = 0 \Rightarrow g(X, Y) = 0 \Rightarrow Y = Y(X) \quad (1.13)$$

В результате имеем

$$\dot{X} = f(X, Y) \Rightarrow \dot{X} = f(X, Y(X)) \Rightarrow \dot{X} = G(X) \quad (1.14)$$

Таким образом, для медленных параметров удается записать замкнутое дифференциальное уравнение. В тех случаях, когда это оказывается возможным, говорят о марковском процессе.

Ввиду условия (1.12) производную по времени в уравнении (1.14) следует понимать не в точном смысле слова, а, как говорят, определенной в 'грубой' временной шкале:

$$\dot{F}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0 (\Delta t \gg \tau_c)} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \quad (1.15)$$

Таким образом, уравнение для подсистемы оказывается приближенным, описывающим процесс в 'грубой' временной шкале.

1.4 Спонтанная релаксация одиночного атома

Пусть мы имеем дело с четырехуровневым атомом. Два верхних уровня мы в дальнейшем будем называть лазерными, поскольку будем полагать, что лазерная генерация осуществляется именно за счет этого перехода. Изначально атом может оказаться в состоянии 2 или 1, а затем за счет спонтанной эмиссии окажется через некоторое время в состояниях 3 или 4. В случае одиночного изолированного атома этот атом взаимодействует с вакуумом электромагнитного поля, за счет которого и осуществляется спонтанный распад атомных состояний.

Для матрицы плотности одиночного атома и электромагнитного поля \hat{F} можем написать следующее уравнение

$$\dot{\hat{F}} = -i [V, \hat{F}] \quad (1.16)$$

Это представление взаимодействия, но мы опустили индекс, указывающий на это. Гамильтониан взаимодействия в дипольном приближении имеет вид

$$V(t) = -d(t) E(t) \quad (1.17)$$

где в квантовой электродинамике оператор напряженности электромагнитного поля может быть представлен как совокупность квантованных полевых осцилляторов во вспомогательном объеме:

$$E(t) = \sum_{k_x, k_y, k_z} i \sqrt{\frac{k}{2L^3}} a_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\vec{r}} + h.c. \quad (1.18)$$

где $[a_{\vec{k}}(t), a_{\vec{k}'}^\dagger(t)] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$.

Мы здесь можем ограничиться резонансным приближением, полагая, что с атомом могут реально взаимодействовать только электромагнитные волны с частотами, близкими к атомным частотам. Тогда мы можем записать

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) + E_3(t) \quad (1.19)$$

$$E_1(t) = \sum_{k_x, k_y, k_z \sim \omega_{21}} i \sqrt{\frac{k}{2L^3}} a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} + h.c. \quad (1.20)$$

$$E_2(t) = \sum_{k_x, k_y, k_z \sim \omega_{23}} i \sqrt{\frac{k}{2L^3}} a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} + h.c. \quad (1.21)$$

$$E_3(t) = \sum_{k_x, k_y, k_z \sim \omega_{14}} i \sqrt{\frac{k}{2L^3}} a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} + h.c. \quad (1.22)$$

Каждая из этих волн находится в вакуумном состоянии и обеспечивают спонтанное излучение с соответствующих атомных уровней. В этом случае возможно усреднение исходного уравнения по вакууму электромагнитного поля именно вследствие того, что поле всегда остается в состоянии вакуума. В результате для матричных элементов атомной матрицы плотности

$$\sigma = Sp_{vacuum} \hat{F} \quad (1.23)$$

получим следующие уравнения

$$\dot{\sigma}_{22} = -\gamma_2 \sigma_{22} \quad (1.24)$$

$$\dot{\sigma}_{11} = -\gamma_1 \sigma_{11} + \gamma' \sigma_{22} \quad (1.25)$$

$$\dot{\sigma}_{12} = -\gamma_{12} \sigma_{12} \quad (1.26)$$

$$\dot{\sigma}_{21} = -\gamma_{12} \sigma_{21} \quad (1.27)$$

$$\dot{\sigma}_{33} = (\gamma_2 - \gamma') \sigma_{22} \quad (1.28)$$

$$\dot{\sigma}_{44} = \gamma_1 \sigma_{11} \quad (1.29)$$

Если речь идет только о спонтанном излучении, то

$$\gamma_{12} = (\gamma_1 + \gamma_2)/2 \quad (1.30)$$

В то же самое время, эти результаты могут быть обобщены на случай, так называемых, слабых столкновений. Если имеют место только тушащие столкновения, то все соотношения сохраняются такими же, как при спонтанном излучении. Однако, диффазирующие столкновения приводят к неравенству $\gamma_{12} \gg (\gamma_1 + \gamma_2)/2$

Глава 2

Теория одномодового лазера : метод кинетического уравнения для матрицы плотности генерации

2.1 Случайная и регулярная накачка лазерной среды

Согласно сказанному во введении мы можем представить скорость изменения матрицы плотности поля генерации в виде суммы двух слагаемых

$$\dot{\rho} = (\dot{\rho})_{damp} + (\dot{\rho})_{matter}, \quad (2.1)$$

где первое слагаемое справа связано с затуханием полевого осциллятора, связанного с конечностью добротности резонатора, а второе слагаемое связано с взаимодействием с лазерной средой. Как помним,

$$(\dot{\rho})_{damp} = -\frac{C}{2}(a^\dagger a \rho + \rho a^\dagger a - 2a \rho a^\dagger). \quad (2.2)$$

И теперь нам предстоит построить второе слагаемое. Пусть полевая матрица плотности меняется за счет одного атома в виде:

$$\rho(t) = (1 + \hat{S})\rho(0). \quad (2.3)$$

Таким образом, приращение полевой матрицы за счет взаимодействия поля с одиночным атомом может быть записано в виде:

$$\Delta\rho(t) = \rho(t) - \rho(0) = \hat{S}\rho(0). \quad (2.4)$$

где \hat{S} это некий супероператор, который нам предстоит вычислить в явном виде.

Если же на временном интервала от 0 до t появилось в резонаторе n атомов, то

$$\rho(t) = (1 + \hat{S})^n \rho(0). \quad (2.5)$$

Предположим, что атомы появляются в резонаторе совершенно случайным образом так, что вероятность найти n атомов определяется распределением Пуассона:

$$W(n) = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}. \quad (2.6)$$

Здесь $\bar{n} = rt$, где r - это средняя скорость накачки лазерной среды.

Давайте усредним равенство (4.14) с этим распределением, и тогда получим, что

$$(\dot{\rho})_{matter} = r\hat{S}\rho. \quad (2.7)$$

Действительно,

$$\overline{(1 + \hat{S})^n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!} (1 + \hat{S})^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\bar{n}} \frac{1}{n!} [\bar{n}(1 + \hat{S})]^n. \quad (2.8)$$

Обозначим $\bar{m} = \bar{n}(1 + \hat{S})$, тогда

$$\overline{(1 + \hat{S})^n} = e^{-\bar{n} + \bar{m}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\bar{m}} \frac{\bar{m}^n}{n!} = e^{-\bar{n} + \bar{m}} = e^{r\hat{S}t}. \quad (2.9)$$

И отсюда сразу следует уравнение (2.7).

В случае же регулярной накачки $n = rt$, и тогда нетрудно получить, что

$$(\dot{\rho})_{matter} = r \ln(1 + \hat{S}) \rho. \quad (2.10)$$

Действительно, из уравнения

$$\hat{\rho}(t) = (1 + \hat{S})^{rt} \hat{\rho}(0) \quad (2.11)$$

следует, что

$$\ln (\hat{\rho}(t)/\hat{\rho}(0)) = rt \ln(1 + \hat{S}), \quad (2.12)$$

то-есть

$$\frac{1}{t} \ln (\hat{\rho}(t)/\hat{\rho}(0)) = r \ln(1 + \hat{S}). \quad (2.13)$$

И это выражение эквивалентно уравнению (2.10) при условии, что $t \rightarrow 0$.

Как видим, в обоих случаях нам нужно знать одноатомный вклад в поле, который формально выражается оператором \hat{S} .

2.2 Вычисление одноатомного супероператора \hat{S}

Пусть мы имеем дело с четырехуровневым атомом. Два самых верхних уровня будем считать лазерными ((2) - верхний и (1) - нижний лазерные уровни). Два нижних уровня вводим для удобства вычисления, полагая, что уровень (2) спонтанно распадается на уровень (3) со скоростью γ_2 , а уровень (1) на уровень (4) со скоростью γ_1 . Мы будем также предполагать, что на верхний лазерный уровень осуществляется некогерентная накачка со средней скоростью r . Причем эта накачка может быть как регулярной, так и совершенно случайной.

Пусть $\hat{F}(t)$ это матрица плотности лазерного поля и одиночного атома. Мы требуем, что в начальный момент времени атом оказывается на верхнем лазерном уровне, то-есть

$$F_{22}(0) = \hat{\rho}(0), \quad (2.14)$$

а все остальные матричные элементы равны нулю. В то же самое время, в момент времени $T \gg \gamma_1^{-1}, \gamma_2^{-1}$ атом заведомо окажется на одном из пары нижних уровней, то-есть

$$\hat{\rho}(T) = F_{33}(T) + F_{44}(T). \quad (2.15)$$

Мы полагаем, что вспомогательные уровни (3) и (4) развиваются только за счет того, что атом спонтанно релаксирует на них с верхней лазерной пары уровней. Тогда мы имеем право написать

$$\dot{F}_{33} = \gamma_2 F_{22}, \quad (2.16)$$

$$\dot{F}_{44} = \gamma_1 F_{11}. \quad (2.17)$$

Интегрируя эти уравнения в интервале от нуля до T , получим

$$F_{33}(T) = \gamma_2 \int_0^T F_{22}(t) dt, \quad (2.18)$$

$$F_{44}(T) = \gamma_1 \int_0^T F_{11}(t) dt. \quad (2.19)$$

Для дальнейшего нам будут удобны следующие обозначения:

$$\sigma_1 = \gamma_1 \int_0^T F_{11}(t) dt \quad (2.20)$$

$$\sigma_2 = \gamma_2 \int_0^T F_{22}(t) dt \quad (2.21)$$

$$\sigma_{12} = \gamma_{12} \int_0^T F_{12}(t) dt \quad (2.22)$$

$$\sigma_{21} = \gamma_{12} \int_0^T F_{21}(t) dt \quad (2.23)$$

И теперь нетрудно увидеть, что полное приращение полевой матрицы

$$\Delta\rho(T) = \rho(T) - \rho(0) \quad (2.24)$$

за счет взаимодействия с одиночным атомом может быть записано в виде:

$$\Delta\rho(T) = \sigma_1 + \sigma_2 - \rho(0) = \hat{S}\rho(0). \quad (2.25)$$

Как видим, вычисление этого приращения дает нам возможность записать искомый оператор \hat{S} в явном виде.

Напомним, что величины σ сформированы из матричных элементов матрицы плотности по атомным переменным и таким образом остаются операторными переменными относительно полевой составляющей.

Чтобы вычислить нужную нам величину, мы будем исходить из следующего уравнения для матрицы плотности одиночного атома \hat{F} :

$$\dot{\hat{F}} = -i [\hat{V}, \hat{F}] + \hat{R}\hat{F}. \quad (2.26)$$

Здесь \hat{V} - это гамильтониан взаимодействия лазерной моды с атомом. В дипольном приближении и в приближении вращающихся волн он может быть записан в виде:

$$\hat{V} = ig a |1\rangle\langle 2| - ig^* a^\dagger |2\rangle\langle 1|. \quad (2.27)$$

Слагаемое справа в уравнении $\hat{R}\hat{F}$ учитывает описанные ранее релаксационные процессы. Это же уравнение в терминах матричных элементов запишется как система уравнений для полевых операторных величин:

$$\dot{F}_{22} = -\gamma_2 F_{22} - ig^* a F_{12} + ig F_{21} a^\dagger, \quad (2.28)$$

$$\dot{F}_{11} = -\gamma_1 F_{11} - ig a^\dagger F_{21} + ig^* F_{12} a, \quad (2.29)$$

$$\dot{F}_{12} = -\gamma_{12} F_{12} - ig a F_{22} + ig F_{11} a^\dagger, \quad (2.30)$$

$$\dot{F}_{21} = -\gamma_{12} F_{21} - ig^* a F_{11} + ig^* F_{22} a. \quad (2.31)$$

Сюда, естественно, надо добавить уравнения (2.16)-(2.17). Еще раз подчеркнем, что, хотя мы и не сохранили "шляпки", тем не менее матричные элементы F_{ik} остаются операторами по отношению к полевым переменным.

Давайте проинтегрируем систему уравнений по времени в интервале от $t = 0$ до $t = T \gg \gamma_{1,2}^{-1}$:

$$\sigma_2 - \hat{\rho}(0) = -ig^*/\gamma_{12} a \sigma_{12} + ig/\gamma_{12} \sigma_{21} a^\dagger, \quad (2.32)$$

$$\sigma_1 = -ig/\gamma_{12} a^\dagger \sigma_{21} + ig^*/\gamma_{12} \sigma_{12} a, \quad (2.33)$$

$$\sigma_{12} = -ig/\gamma_2 a^\dagger \sigma_{22} + ig/\gamma_1 \sigma_{11} a^\dagger, \quad (2.34)$$

$$\sigma_{21} = -ig^*/\gamma_1 a \sigma_{11} + ig^*/\gamma_2 \sigma_{22} a. \quad (2.35)$$

Уравнения (2.34)-(2.35) дают возможность выразить величины σ_{12} и σ_{21} через комбинацию диагональных элементов σ_1 и σ_2 . Таким образом, мы

имеем возможность записать замкнутую систему уравнений только для диагональных элементов, и эта система имеет следующую форму:

$$\sigma_2 - \hat{\rho}(0) = -\beta_2 \hat{I}_2 \sigma_2 + \beta_1 \hat{i}_1 \sigma_1, \quad (2.36)$$

$$\sigma_1 = -\beta_1 \hat{I}_1 \sigma_1 + \beta_2 \hat{i}_2 \sigma_2, \quad (2.37)$$

где коэффициенты выражены через супероператоры:

$$\hat{I}_1 = \frac{1}{2} (\overset{\rightarrow}{a^+} a + \overset{\leftarrow}{a^+} a), \quad (2.38)$$

$$\hat{I}_2 = \frac{1}{2} (a \overset{\rightarrow}{a^+} + a \overset{\leftarrow}{a^+}), \quad (2.39)$$

$$\hat{i}_1 = \vec{a} \overset{\leftarrow}{a^+}, \quad (2.40)$$

$$\hat{i}_2 = \overset{\rightarrow}{a^+} \overset{\leftarrow}{a}. \quad (2.41)$$

Стрелки под фотонными операторами указывают на то, с какой стороны они должны действовать на пробную функцию.

В уравнениях фигурируют коэффициенты, характеризующие насыщающие свойства среды:

$$\beta_1 = \frac{2 |g|^2}{\gamma_1 \gamma_{12}}, \quad \beta_2 = \frac{2 |g|^2}{\gamma_2 \gamma_{12}}, \quad \beta = \beta_1 + \beta_2 \quad (2.42)$$

определяют нелинейные свойства вещества и называются параметрами насыщения. Величина β^{-1} дает так называемое насыщающее атомный переход число фотонов.

Нетрудно получить формальные решения системы (2.36)-(2.37). Оно будет иметь следующий вид:

$$\sigma_2 = \left(1 + \beta_1 \hat{I}_2 \right) \frac{1}{\hat{\Lambda}} \hat{\rho}(0), \quad (2.43)$$

$$\sigma_1 = \beta_2 \hat{I}_2 \frac{1}{\hat{\Lambda}} \hat{\rho}(0) \quad (2.44)$$

где оператор $\hat{\Lambda}$ имеет следующий вид:

$$\hat{\Lambda} = \left(1 + \beta_1 \hat{I}_2 \right) \left(1 + \beta_2 \hat{I}_2 \right) - \beta_1 \beta_2 \hat{i}_1 \hat{i}_2 \quad (2.45)$$

Теперь нетрудно увидеть, что искомый супероператор \hat{S} имеет следующую форму:

$$\hat{S} = \left(1 + \beta_1 \hat{I}_2 + \beta_2 \hat{i}_2 - \hat{\Lambda} \right) \frac{1}{\hat{\Lambda}}. \quad (2.46)$$

2.3 Основное лазерное уравнение в представлении Глаубера

2.3.1 Основное лазерное уравнение

Напоминаем, что скорость изменения полевой матрицы плотности складывается из двух скоростей, а именно связанной с затуханием из резонатора и взаимодействием с материальной средой:

$$\dot{\hat{\rho}} = \left(\dot{\hat{\rho}} \right)_{matter} + \left(\dot{\hat{\rho}} \right)_{cavity} \quad (2.47)$$

Все предыдущее изложение позволяет нам теперь записать основное уравнение в следующем явном виде:

$$\dot{\hat{\rho}} = r \left(\hat{S} - \frac{p}{2} \hat{S}^2 \right) \rho - \hat{R} \hat{\rho}. \quad (2.48)$$

Здесь супероператор

$$\hat{R} = C/2 \left(\overrightarrow{a^+} a + \overleftarrow{a^+} a - 2 \overrightarrow{a} \overleftarrow{a^+} \right) \quad (2.49)$$

определяет затухание полевого осциллятора со скоростью C за счет конечной добротности оптического резонатора и супероператор \hat{S} (см. (2.46)) определяет воздействие лазерной среды. Последний может быть записан в виде:

$$\hat{S} = \beta_2 \left[\overrightarrow{a^+} \overleftarrow{a} - \frac{1}{2} (\overrightarrow{aa^+} + \overleftarrow{aa^+}) - \beta_1 (\overrightarrow{aa^+} - \overleftarrow{aa^+})^2 \right] \times \frac{1}{1 + \beta (\overrightarrow{aa^+} + \overleftarrow{aa^+}) + \beta_1 \beta_2 (\overrightarrow{aa^+} - \overleftarrow{aa^+})^2} \quad (2.50)$$

Написанное основное уравнение верно для случайной накачки, когда необходимо положить $p = 0$, и для регулярной накачки с $p = 1$. При записи уравнения в случае регулярной накачки мы применили разложение логарифмической функции в виде

$$\ln(1 + \hat{S}) \approx \hat{S} - \frac{1}{2} \hat{S}^2. \quad (2.51)$$

2.3.2 Представление Глаубера

Напомним, что представление Глаубера вводится интегральным соотношением:

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha) |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha, \quad (2.52)$$

где интегрирование производится на комплексной плоскости собственного значения оператора уничтожения:

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (2.53)$$

Полагая, что

$$\alpha = \sqrt{U} e^{i\varphi}, \quad (2.54)$$

можно получить следующие соотношения (см. Часть 1 этого методического пособия):

$$\overrightarrow{aa^+} = U - U \frac{\partial}{\partial U} - \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (2.55)$$

$$\overleftarrow{aa^+} = U - U \frac{\partial}{\partial U} + \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (2.56)$$

$$\overrightarrow{a^+a} = U - \frac{\partial}{\partial U} U - \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (2.57)$$

$$\overleftarrow{a^+a} = U - \frac{\partial}{\partial U} U - \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (2.58)$$

$$\overrightarrow{a^+} \overleftarrow{a} = U - \frac{\partial}{\partial U} U - U \frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial}{\partial U} U \frac{\partial}{\partial U} + \frac{1}{4U} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (2.59)$$

$$\overrightarrow{a} \overleftarrow{a^+} = U. \quad (2.60)$$

Отметим еще распространенные комбинации

$$\frac{1}{2} (\overrightarrow{aa^+} + \overleftarrow{aa^+}) = U - U \frac{\partial}{\partial U}, \quad (2.61)$$

$$\frac{1}{2} (\overrightarrow{a^+a} + \overleftarrow{a^+a}) = U - \frac{\partial}{\partial U} U, \quad (2.62)$$

$$\frac{1}{2} (\overrightarrow{aa^+} - \overleftarrow{aa^+}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{a^+a} - \overleftarrow{a^+a}) = \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (2.63)$$

Теперь мы можем переписать основное уравнение в глауберовской квазивероятности в форме:

$$\dot{P}(U, \varphi, t) = r \left(\hat{S} - \frac{p}{2} \hat{S}^2 \right) P(U, \varphi, t) - \hat{R} P(U, \varphi, t), \quad (2.64)$$

где теперь \hat{S} и \hat{R} дифференциальные операторы вида:

$$\hat{R} = -C \frac{\partial}{\partial U} U, \quad (2.65)$$

$$\hat{S} = \beta_2 \left[-\frac{\partial}{\partial U} U + \frac{\partial}{\partial U} U \frac{\partial}{\partial U} + \left(\frac{1}{4U} + \beta_1 \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \times \frac{1}{1 + \beta \left(U - U \frac{\partial}{\partial U} \right) - \beta_1 \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}}. \quad (2.66)$$

Наличие операторов в знаменателе следует трактовать только в том смысле, что реально мы имеем дело со степенным рядом, который формально сворачивается в такую функцию. Например,

$$\frac{1}{1 + \hat{x}} = 1 - \hat{x} + \hat{x}^2 - \dots \quad (2.67)$$

Возвращаясь к степенному представлению, мы получим следующее:

$$\hat{S} = \beta_2 \left[-\frac{\partial}{\partial U} \frac{U}{1 + \beta U} - \frac{\partial}{\partial U} \frac{\beta U^2}{(1 + \beta U)^2} \frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial}{\partial U} U \frac{\partial}{\partial U} \frac{1}{1 + \beta U} + \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \beta U} \left(\frac{1}{U} + \beta_1 \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \{\dots\} \right]. \quad (2.68)$$

Здесь $\{\dots\}$ означает набор производных более высоких порядков, нежели второй. Как известно, в случае классических полей этим набором можно пренебречь.

2.3.3 Приближение малых фотонных флуктуаций

Для стационарной лазерной генерации характерна ситуация, в которой флуктуации числа фотонов относительно малы так, что точные решения задачи реально мало отличаются от тех, которые могли бы быть получены в полуклассической теории без учета флуктуаций. Это означает, что можно написать следующее:

$$U = N + \varepsilon, \quad \varepsilon \ll N, \quad (2.69)$$

где N - это решение полуклассической лазерной задачи. В рамках принятой модели, полуклассическая теория определяется следующим уравнением:

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{1 + \beta|\alpha|^2} - C \right) \alpha. \quad (2.70)$$

Здесь $A = \beta_2 r$ - это линейный коэффициент усиления среды. В случае стационарной генерации получаем

$$\frac{r\beta_2}{1 + \beta N} - C = 0, \quad N = |\alpha|^2. \quad (2.71)$$

Полуклассическая теория может быть получена прямо из наших уравнений. Как известно, все статистические свойства света задаются вторыми и более высокими производными по полевым амплитудам. Отбрасывая их, получим следующее:

$$\dot{P} = \frac{\partial}{\partial U} U \left(C - \frac{r\beta_2}{1 + \beta U} \right) P. \quad (2.72)$$

Как видим, то, что стоит под знаком первой производной справа, как раз и составляет содержание полуклассической теории.

Давайте сначала обсудим ситуацию с совершенно случайной накачкой лазерной среды. Точное уравнение в этом случае выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{P} = & \frac{\partial}{\partial U} \left[U \left(C - \frac{A}{1 + \beta U} \right) \rho \right] - \frac{\partial}{\partial U} \frac{A\beta U^2}{(1 + \beta U)^2} \frac{\partial P}{\partial U} + \\ & + \frac{\partial P}{\partial U} U \frac{\partial P}{\partial U} \frac{A}{1 + \beta U} + \frac{1}{4} \frac{A}{1 + \beta U} \left(\frac{1}{U} + \beta_1 \right) \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} + \{\dots\}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

При переходе от переменной U к переменной ε , мы должны под знаком первой производной удерживать члены порядка ε/N поскольку нулевой порядок автоматически равен нулю в силу равенства (2.71). В то же самое время под знаками вторых и более высоких порядков производных мы можем ограничиться нулевым порядком по указанной малости.

В результате этих действий окончательное уравнение имеет вид:

$$\dot{P} = \Gamma \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varepsilon P + \Gamma N \xi \frac{\partial^2 P}{\partial \varepsilon^2} + \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} + \{\dots\}, \quad (2.74)$$

где коэффициенты имеют следующее явное представление:

$$\Gamma = C \frac{\beta N}{1 + \beta N}, \quad (2.75)$$

$$\xi = \frac{1}{\beta N}, \quad (2.76)$$

$$D = \frac{C}{2N} (1 + \beta_1 N). \quad (2.77)$$

Из уравнения (2.74) нетрудно получить два отдельных уравнений для фотонной

$$R(\varepsilon, t) = \int d\varphi P(\varepsilon, \varphi, t) \quad (2.78)$$

и фазовой

$$\Phi(\varphi, t) = \int d\varepsilon P(\varepsilon, \varphi, t) \quad (2.79)$$

квазивероятностей:

$$\dot{R} = \Gamma \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varepsilon R + \Gamma N \xi \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon^2} + \{\dots\}, \quad (2.80)$$

$$\dot{\Phi} = \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \{\dots\}. \quad (2.81)$$

Глава 3

Детектирование лазерного излучения

3.1 Связь поля, выходящего из резонатора, с внутрирезонаторным

Давайте обсудим, каким образом простейшее одномодовое поле, возбуждаемое в высокочастотном резонаторе, может быть детектировано. Пусть $\hat{E}(\vec{r}, t)$ - это положительно-частотный оператор электрического поля, распространяющегося в вакууме. Это поле обычно квантуется в кубе с линейным размером L с периодическими граничными условиями. Когда объем куба становится неограниченным $L \rightarrow \infty$, этот оператор может быть записан в виде интеграла Фурье по пространственным переменным:

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = i \left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0} \right)^{1/2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \sqrt{\omega_{\vec{k}}} \hat{a}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega_{\vec{k}}t}. \quad (3.1)$$

Здесь ε_0 это диэлектрическая проницаемость вакуума, и в свободном пространстве $\omega_{\vec{k}} = kc$. Операторы $\hat{a}(\vec{k})$ и $\hat{a}^\dagger(\vec{k})$ подчиняются каноническим перестановочным соотношениям:

$$\left[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}') \right] = (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad \left[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}(\vec{k}') \right] = 0. \quad (3.2)$$

Мы хотим изучать одномодовое поле, которое формируется внутри высокочастотного резонатора в процессе лазерной генерации. Будем пола-

гать, что вышедшая из резонатора волна является плоской квазимонохроматической волной. Тогда интеграл (3.5) может быть деформирован в следующее выражение:

$$\hat{E}_{out}(\vec{r}, t) = i \left(\frac{c\hbar\omega_0}{2\varepsilon_0 c} \right)^{1/2} e^{ik_0 z - i\omega_0 t} \hat{a}_{out}(t), \quad (3.3)$$

где

$$\hat{a}_{out}(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \hat{a}(\omega) e^{-i(\omega - \omega_0)t}, \quad (3.4)$$

$$[\hat{a}(\omega), \hat{a}^\dagger(\omega')] = 2\pi\delta(\omega - \omega'). \quad (3.5)$$

Здесь индекс *out* указывает на то, что мы стараемся написать выражение для электромагнитного поля, вышедшего из резонатора.

Теперь нетрудно получить, что

$$[\hat{a}_{out}(t), \hat{a}_{out}^\dagger(t')] = \delta(t - t'), \quad [\hat{a}_{out}(t), \hat{a}_{out}(t')] = 0. \quad (3.6)$$

Важная особенность этого выражения состоит в том, что оно совершенно не зависит от того, что происходит с полем в резонаторе.

Как ясно из предыдущего, внутрирезонаторной волне могут быть сопоставлены фотонные операторы \hat{a}_{in} и \hat{a}_{in}^\dagger , чья алгебра определяется коммутационным соотношением

$$[\hat{a}_{in}(t), \hat{a}_{in}^\dagger(t)] = 1. \quad (3.7)$$

Смысл операторов \hat{a}_{in} и \hat{a}_{out} разный. Это видно хотя бы по размерностям: если смотреть на коммутационные соотношения, то видно, что оператор \hat{a}_{in} безразмерный, а оператор \hat{a}_{out} имеет размерность $\text{sec}^{-1/2}$. Оператор $\hat{a}_{in}^\dagger \hat{a}_{in}$ имеет смысл оператора числа частиц в резонаторе, а оператор $\hat{a}_{out}^\dagger \hat{a}_{out}$ имеет смысл оператора числа частиц, пролетающих снаружи резонатора через поперечное сечение луча в единицу времени.

Понятно, что между *in*- и *out*-операторами должна быть связь, которая может быть качественно установлена следующим образом. Если в резонаторе N фотонов, то поток фотонов изнутри резонатора на внутреннюю поверхность выходного зеркала будет равна

$$cN/V S = c/L N. \quad (3.8)$$

Здесь c - скорость света в вакууме, $V = L \cdot S$, L - периметр резонатора, S - поперечное сечение резонатора. Чтобы определить поток уже снаружи резонатора, нам надо умножить это выражение на коэффициент пропускания зеркала, что дает наружный поток в виде CN , где $C = cT^2/L$ - это спектральная модовая ширина. В этой связи будем писать соотношение между внутренними и внешними амплитудами поля в следующем виде:

$$\hat{a}_{out} = \sqrt{C} \hat{a}_{in} - \hat{a}_{vac.}, \quad \hat{a}_{out}^\dagger = \sqrt{C} \hat{a}_{in}^\dagger - \hat{a}_{vac.}^\dagger. \quad (3.9)$$

Здесь добавлены вакуумные амплитуды, которые дают вклад в интересующую нас амплитуду вследствие отражения от зеркала: выходное зеркало смешивает с точки зрения квантовой электродинамики два потока, а именно одного, идущего из резонатора через выходное зеркало, и другого, идущего из свободного пространства, которое подмешивается при отражении от зеркала. Эта добавка является принципиально важной, так именно она обеспечивает соблюдение коммутационных соотношений (3.6) и их независимость от того, что происходит реально внутри резонатора.

Поскольку вакуумные амплитуды описывают распространение вакуумного поля в свободном пространстве, то для них мы обязаны написать коммутационные соотношения вида:

$$[\hat{a}_{vac.}(t), \hat{a}_{vac.}^\dagger(t')] = \delta(t - t'), \quad [\hat{a}_{vac.}(t), \hat{a}_{vac.}(t')] = 0. \quad (3.10)$$

Мы можем ввести в рассмотрение эрмитовский оператор

$$\hat{i}(t) = \hat{a}_{out}^\dagger(t) \hat{a}_{out}(t), \quad (3.11)$$

который имеет смысл оператора числа фотонов, пробегающих в единицу времени через поперечное сечение луча. В случае идеального фотодетектирования мы сопоставляем это с оператором фототока.

Построим корреляционную функцию вида:

$$\langle \hat{i}(t) \hat{i}(t') \rangle = \langle \hat{a}_{out}^\dagger(t) \hat{a}_{out}(t) \hat{a}_{out}^\dagger(t') \hat{a}_{out}(t') \rangle. \quad (3.12)$$

Применяя перестановочные соотношения для операторов поля в свободном пространстве, получим

$$\begin{aligned} \langle \hat{i}(t) \hat{i}(t') \rangle &= \langle \hat{a}_{out}^\dagger(t) \hat{a}_{out}^\dagger(t') \hat{a}_{out}(t') \hat{a}_{out}(t) \rangle + \\ &+ \langle \hat{a}_{out}^\dagger(t) \hat{a}_{out}(t) \rangle \delta(t - t'). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Теперь сделаем две операции: прежде всего, согласно (3.9) заменим out- на in-операторы и затем заменим in-операторы на глауберовские с-числовые амплитуды. Поскольку под знаком среднего все операторы стоят в нормальном порядке, обе эти операции делаются предельно просто: с одной стороны, вакуумные амплитуды вклада давать не будут, а с другой стороны, производные по глауберовским переменным возникать не будут:

$$\begin{aligned} \langle \hat{i}(t) \hat{i}(t') \rangle &= C^2 \langle \hat{a}_{in}^\dagger(t) \hat{a}_{in}^\dagger(t') \hat{a}_{in}(t') \hat{a}_{in}(t) \rangle + \\ &+ C \langle \hat{a}_{in}^\dagger(t) \hat{a}_{in}(t) \rangle \delta(t - t') = \\ &= CN_{in} \delta(t - t') + C^2 \langle |\alpha_{in}(t)|^2 |\alpha_{in}(t')|^2 \rangle \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$N_{in} = \langle \hat{a}_{in}^\dagger(t) \hat{a}_{in}(t) \rangle = \langle |\alpha_{in}(t)|^2 \rangle. \quad (3.15)$$

Перейдем от фототока \hat{i} и числа фотонов $|\alpha_{in}|^2$ к их флуктуациям:

$$\delta \hat{i} = \hat{i} - \bar{i} \quad (\bar{i} = CN_{in}), \quad \varepsilon = |\alpha_{in}|^2 - N_{in}, \quad (3.16)$$

тогда функция корреляций фототоков переписывается в виде:

$$\langle \delta \hat{i}(t) \delta \hat{i}(t') \rangle = CN_{in} [\delta(t - t') + C/N_{in} \langle \varepsilon(t) \varepsilon(t') \rangle]. \quad (3.17)$$

Переписем это выражение в спектральном представлении. Используя формулы Фурье-преобразования для фототока

$$\delta i_\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \delta i(t) \exp(i\omega t), \quad (3.18)$$

$$\delta i(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \delta i_\omega \exp(-i\omega t). \quad (3.19)$$

и для числа фотонов

$$\varepsilon_\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \varepsilon(t) \exp(i\omega t), \quad (3.20)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \varepsilon_\omega \exp(-i\omega t), \quad (3.21)$$

получим следующее

$$\langle \delta \hat{i}_\omega \delta \hat{i}_{\omega'} \rangle = CN_{in} [\delta(\omega + \omega') + C/N_{in} \langle \varepsilon_\omega \varepsilon_{\omega'} \rangle]. \quad (3.22)$$

Мы предполагаем, что мы исследуем стационарные световые потоки, тогда мы должны потребовать, что

$$\langle \delta \hat{i}_\omega \delta \hat{i}_{\omega'} \rangle = (\delta i^2)_\omega \delta(\omega + \omega'), \quad \langle \varepsilon_\omega \varepsilon_{\omega'} \rangle = (\varepsilon^2)_\omega \delta(\omega + \omega'). \quad (3.23)$$

Тогда для спектральной плотности фототока может быть написано следующее:

$$(\delta i^2)_\omega = CN_{in} [1 + C/N_{in} (\varepsilon^2)_\omega]. \quad (3.24)$$

3.2 Спектральная плотность фотонных флуктуаций

Для вычисления спектральной плотности фотонных флуктуаций $(\varepsilon^2)_\omega$ мы будем использовать уравнение (2.80). Запишем его здесь заново:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \Gamma \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varepsilon R + \Gamma N_{in} \xi \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon^2} + \{ \dots \}, \quad (3.25)$$

$$\Gamma = C \frac{I}{1 + I}, \quad I = \beta N_{in}, \quad (3.26)$$

$$\xi = \frac{1}{I} \quad \text{для случайной накачки}, \quad (3.27)$$

$$\xi = \frac{1}{I} - \frac{1}{2} \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \quad \text{для регулярной накачки}. \quad (3.28)$$

Решение этого уравнения может быть записано с помощью так называемой условной вероятности $G(\varepsilon_0, t_0 | \varepsilon, t)$:

$$R(\varepsilon, t) = \int d\varepsilon_0 R(\varepsilon_0, t_0) G(\varepsilon_0, t_0 | \varepsilon, t). \quad (3.29)$$

Очевидно, что

$$G(\varepsilon_0, t_0 | \varepsilon, t_0) = \delta(\varepsilon - \varepsilon_0), \quad (3.30)$$

$$G(\varepsilon_0, t_0 | \varepsilon, t < t_0) = 0. \quad (3.31)$$

Также очевидно, что условная вероятность подчиняется тому же самому уравнению, что и сама квазивероятность:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} G(\varepsilon_0, t_0 | \varepsilon, t) = & \Gamma \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varepsilon G(\varepsilon_0, t_0 | \varepsilon, t) + \Gamma N_{in} \xi \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} G(\varepsilon_0, t_0 | \varepsilon, t) + \\ & + \{ \dots \}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

В согласии с общими положениями теории вероятностей парная корреляция $\langle \varepsilon(t) \varepsilon(t') \rangle$ может быть записана с помощью условной вероятности в виде:

$$\langle \varepsilon(t) \varepsilon(t') \rangle = \int \int d\varepsilon d\varepsilon' \varepsilon \varepsilon' G(\varepsilon', t' | \varepsilon, t). \quad (3.33)$$

Имея это в виду, из уравнения (3.32) получим уравнение для искомой парной корреляции в виде:

$$\frac{d}{dt} \langle \varepsilon(t') \varepsilon(t) \rangle = -\Gamma \langle \varepsilon(t') \varepsilon(t) \rangle. \quad (3.34)$$

Таким образом,

$$\langle \varepsilon(t') \varepsilon(t) \rangle = \langle \varepsilon^2 \rangle e^{-\Gamma |t-t'|}. \quad (3.35)$$

Чтобы найти в явном виде величину $\langle \varepsilon^2 \rangle$, воспользуемся уравнением (??). Умножим его справа и слева на ε^2 и проинтегрируем по всем значениям ε и получим следующее:

$$\frac{d}{dt} \langle \varepsilon^2 \rangle = -2\Gamma \langle \varepsilon^2 \rangle + 2\Gamma N_{in} \xi. \quad (3.36)$$

В режиме стационарной генерации получим

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = N_{in} \xi. \quad (3.37)$$

Переходя теперь к спектральному представлению, получим выражение для спектральной плотности флуктуаций числа фотонов в виде:

$$(\varepsilon^2)_\omega = 2\xi N_{in} \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + \omega^2}. \quad (3.38)$$

Подставляя это в (3.24), получим для спектра фототока следующее выражение в явном виде:

$$(\delta i^2)_\omega = C N_{in} \left[1 + 2\xi \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + \omega^2} \right]. \quad (3.39)$$

Если мы выбрали режим генерации со случайной накачкой, то, как помним, в режиме насыщения $\xi = 0$, и мы имеем дело с пуассоновским лазером, спектр фототока при этом определяется полностью дробовой составляющей:

$$(\delta i^2)_\omega = \bar{i}. \quad (3.40)$$

Для регулярной накачки при $\gamma_2 \ll \gamma_1$ и тоже в режиме насыщения $\xi = -1/2$, и спектр фототока

$$(\delta i^2)_\omega = \bar{i} \left[1 - \frac{C^2}{C^2 + \omega^2} \right]. \quad (3.41)$$

Как видим, в этом случае дробовой шум оказывается подавленным на околонулевых частотах в пределах спектральной резонаторной ширины C . Это случай субпуассоновского лазера.

Глава 4

Теория одномодового лазера: метод уравнений Гейзенберга-Ланжевена

4.1 Полуклассическая теория лазера

Мы будем рассматривать ровно ту же модель лазера, что и прежде. Единственная разница будет состоять в том, что мы не будем ограничиваться так называемым кинетическим приближением $C \ll \gamma_1, \gamma_2$, когда только и возможно построение кинетического уравнения для матрицы плотности поля генерации.

Уравнения полу-классической теории лазеров связывают комплексную амплитуду поля генерации a с коллективной поляризацией лазерного перехода P и коллективными заселенностями верхнего N_1 и нижнего N_2 лазерных уровней. Эти уравнения имеют хорошо известную форму:

$$\dot{a} = -C/2 a + gP, \quad (4.1)$$

$$\dot{P} = -\gamma_{\perp} P + g(N_1 - N_2)a, \quad (4.2)$$

$$\dot{N}_1 = R - \gamma_1 N_1 - g(a^{\dagger} P + a P^{\dagger}), \quad (4.3)$$

$$\dot{N}_2 = -\gamma_2 N_2 + g(a^{\dagger} P + a P^{\dagger}). \quad (4.4)$$

Для нас будут полезны стационарные решения, для которых имеют место следующие равенства:

$$N_{1,cl.} = \frac{R}{\gamma_1} \frac{1 + \beta_2 n}{1 + \beta n}, \quad N_{2,cl.} = \frac{R}{\gamma_1} \frac{\beta_2 n}{1 + \beta n},$$

$$P_{cl.} = \frac{R}{\gamma_1} \frac{g}{\gamma_\perp} \frac{1}{1 + \beta n} a_{cl.}, \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 2g^2/(\gamma_1\gamma_\perp), & \beta_2 &= 2g^2/(\gamma_2\gamma_\perp), & \beta &= \beta_1 + \beta_2, \\ N &= |a_{cl.}|^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Полуклассическая теория не фиксирует фазу генерирующей моды, поэтому в дальнейшем мы будем полагать, что

$$\alpha_{cl.} = \alpha_{cl.}^* = \sqrt{N} \quad (4.7)$$

Принимая в расчет, что согласно (4.1) в стационарных условиях

$$2gP_{cl.} = C\sqrt{N}, \quad (4.8)$$

мы получаем следующие полезные соотношения:

$$\begin{aligned} R &= C/\beta_1(1 + \beta N), & \gamma_2 N_{2,cl.} &= CN, \\ \gamma_1 N_{1,cl.} &= C/\beta_1 (1 + \beta_2 N) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Далее мы будем принимать наиболее интересное для нас условие $\gamma_2 \gg \gamma_1$. Это означает, что время жизни верхнего лазерного уровня гораздо больше времени жизни нижнего уровня. Кроме того для упрощения формул положим $2\gamma_\perp = \gamma_1 + \gamma_2 \approx \gamma_2$. Тогда

$$\gamma_1 N_{1,cl.} = C/\beta_1, \quad \gamma_2 N_{2,cl.} = CN, \quad R = C/\beta_1(1 + \beta_1 N). \quad (4.10)$$

4.2 Уравнения Гейзенберга-Ланжевена

Вследствие квантования все эти переменные становятся операторами и, как мы теперь понимаем, наличие в этих уравнениях членов, ответственных за затухание, приводит к появлению неоднородных членов. Согласно [3, 4] уравнения Гейзенберга-Ланжевена могут быть записаны в этом случае в следующем виде:

$$\dot{\hat{a}} = -C/2 \hat{a} + g\hat{P} + \hat{F}_a, \quad (4.11)$$

$$\dot{\hat{P}} = -\gamma_\perp \hat{P} + g(\hat{N}_1 - \hat{N}_2)\hat{a} + \hat{F}_p, \quad (4.12)$$

$$\dot{\hat{N}}_1 = R - \gamma_1 \hat{N}_1 - g(\hat{a}^\dagger \hat{P} + \hat{a} \hat{P}^\dagger) + \hat{F}_1, \quad (4.13)$$

$$\dot{\hat{N}}_2 = -\gamma_2 \hat{N}_2 + g(\hat{a}^\dagger \hat{P} + \hat{a} \hat{P}^\dagger) + \hat{F}_2, \quad (4.14)$$

где операторные источники в уравнениях задаются следующими ненулевыми корреляционными функциями:

$$\langle \hat{F}_a(t) \hat{F}_a^\dagger(t') \rangle = C \delta(t - t'), \quad (4.15)$$

$$\langle \hat{F}_1(t) \hat{F}_1^\dagger(t') \rangle = [\gamma_1 \langle N_1 \rangle + R(1 - p)] \delta(t - t'), \quad (4.16)$$

$$\langle \hat{F}_2(t) \hat{F}_2^\dagger(t') \rangle = \gamma_2 \langle N_2 \rangle \delta(t - t'), \quad (4.17)$$

$$\langle \hat{F}_p^\dagger(t) \hat{F}_p(t') \rangle = [(2\gamma_\perp - \gamma_1) \langle N_1 \rangle + R] \delta(t - t'), \quad (4.18)$$

$$\langle \hat{F}_p(t) \hat{F}_p^\dagger(t') \rangle = (2\gamma_\perp - \gamma_2) \langle N_2 \rangle \delta(t - t'), \quad (4.19)$$

$$\langle \hat{F}_p(t) \hat{F}_1(t') \rangle = \gamma_1 \langle P \rangle \delta(t - t') \quad (4.20)$$

$$\langle \hat{F}_2(t) \hat{F}_p(t') \rangle = \gamma_2 \langle P \rangle \delta(t - t'). \quad (4.21)$$

Здесь во второй формуле имеет место параметр p , который связан со статистикой возбуждения верхнего лазерного уровня. Если накачка совершенно случайная (пуассоновская), то $p = 0$, если - строго регулярная (субпуассоновская), то $p = 1$. Промежуточные ситуации характеризуется соотношением $0 < p < 1$, а суперпуассоновская накачка имеет место при $p < 0$.

Для построения спектров фототока при детектировании лазерного излучения нам важно будет знать еще средние от нормально упорядоченных произведений операторов. Они также могут быть найдены в работах [3, 4]:

$$\begin{aligned} \langle : \hat{F}_1(t) \hat{F}_1^\dagger(t') : \rangle &= \\ &= [\gamma_1 \langle N_1 \rangle - g \langle \hat{a}^\dagger \hat{P} + \hat{a} \hat{P}^\dagger \rangle + R(1 - p)] \delta(t - t'), \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\langle : \hat{F}_2(t) \hat{F}_2^\dagger(t') : \rangle = [\gamma_2 \langle N_2 \rangle - g \langle \hat{a}^\dagger \hat{P} + \hat{a} \hat{P}^\dagger \rangle] \delta(t - t'), \quad (4.23)$$

$$\langle : \hat{F}_1(t) \hat{F}_2^\dagger(t') : \rangle = g \langle \hat{a}^\dagger \hat{P} + \hat{a} \hat{P}^\dagger \rangle \delta(t - t'), \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \langle : \hat{F}_p^\dagger(t) \hat{F}_p(t') : \rangle &= \\ &= \langle : \hat{F}_p(t) \hat{F}_p^\dagger(t') : \rangle = [(2\gamma_\perp - \gamma_1) \langle N_1 \rangle + R] \delta(t - t'), \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\langle : \hat{F}_p(t) \hat{F}_p(t') : \rangle = 2g \langle \hat{a} \hat{P} \rangle \delta(t - t'), \quad (4.26)$$

$$\langle : \hat{F}_p(t) \hat{F}_2^\dagger(t') : \rangle = \langle : \hat{F}_2(t) \hat{F}_p^\dagger(t') : \rangle = \gamma_2 \langle \hat{P} \rangle \delta(t - t'). \quad (4.27)$$

4.3 Адиабатические уравнения и их линеаризация

При том выборе атомных констант, который был нами сделан, мы можем понять, что среди прочих переменных поляризация лазерного перехода \hat{P} и заселенность нижнего лазерного уровня \hat{N}_2 являются самыми быстрыми переменными, и они могут быть исключены из теории в рамках адиабатического приближения. Тогда из равенств $\dot{\hat{P}} = 0$ и $\dot{\hat{N}}_2 = 0$ можно в явном виде записать значения \hat{P} и \hat{N}_2 как функции от \hat{a} и \hat{N}_1 и подставить их в оставшиеся два уравнения. Вследствие чего наша теория в адиабатическом приближении представляется теперь системой двух уравнений:

$$\dot{\hat{N}}_1 = R - \gamma_1 \hat{N}_1 - c \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{N}_1 + \hat{\xi}_1(t), \quad c = 2g^2/\gamma_\perp = \beta_1 \gamma_1, \quad (4.28)$$

$$\dot{\hat{a}} = -C/2 \hat{a} + c/2 \hat{N}_1 \hat{a} + \hat{\xi}_a, \quad (4.29)$$

где новые источники выражаются через начальные в виде:

$$\hat{\xi}_1 = \hat{F}_1 + c/\gamma_2 \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{F}_2 - g/\gamma_\perp (\hat{a}^\dagger \hat{F}_p + \hat{a} \hat{F}_p^\dagger), \quad (4.30)$$

$$\hat{\xi}_a = \hat{F}_a + g/\gamma_\perp (\hat{F}_p - g/\gamma_2 \hat{F}_2 \hat{a}). \quad (4.31)$$

Уравнение (4.29) легко линеаризуется, поскольку оно зависит только от числа атомов и числа фотонов, которые, разумеется, слабо флуктуируют около своих полуклассических значений:

$$\hat{\varepsilon} = \hat{a}^\dagger \hat{a} - N \ll N, \quad \delta N_1 = N_1 - N_{1,cl.} \ll N_{1,cl.} \quad (4.32)$$

После линеаризации получаем следующее:

$$\delta \dot{\hat{N}}_1 = -\Gamma \delta \hat{N}_1 - C \hat{\varepsilon} + \hat{\xi}_1(t), \quad \Gamma = \gamma_1 + cN. \quad (4.33)$$

В то же самое время, линеаризовать уравнение (4.29), по меньшей мере, не просто. Дело в том, что из-за диффузии фазы поля, которая имеет место всегда в лазерной генерации, мы не можем, вообще говоря, потребовать, чтобы оператор

$$\delta \hat{a} = \hat{a} - \sqrt{N} \quad (4.34)$$

был бы много меньше величины \sqrt{N} . В статистической полуклассической теории, где имеет место комплексная s -числовая амплитуда, мы

могли бы перейти к двум переменным, а именно, к вещественной амплитуде поля и к фазе. При этом получается, что фазовое развитие оказывается независимым от амплитудного, что позволяет описать диффузию фазы, но одновременно провести линеаризацию по всем остальным переменным. В квантовой теории подобное представление оператора уничтожения фотонов оказывается затруднительным, поэтому затруднительно провести и корректную линеаризацию.

Частым подходом к этой проблеме является следующий. Дело в том, что скорость амплитудных (фотонных) и фазовых флуктуаций в лазерной системе существенно разные. Поскольку фазовые флуктуации обычно на много порядков более медленные, чем фотонные, то в наших уравнениях мы можем ограничить тот временной интервал, на котором процесс рассматривается, и пренебрегать фазовой диффузией в этом интервале. И тогда все-таки применить критерий малости комплексной амплитуды поля

$$\delta\hat{a} = \hat{a} - \sqrt{N} \ll \sqrt{N}. \quad (4.35)$$

Тогда мы сможем линеаризовать уравнение (4.29) в следующей форме:

$$\delta\dot{\hat{a}} = c/2N \delta\hat{N}_1 + \hat{\xi}_a. \quad (4.36)$$

Перепишем это уравнение для комплексной амплитуды через квадратурные компоненты:

$$\delta\hat{a} = \delta\hat{X} + i \delta\hat{Y}. \quad (4.37)$$

Нетрудно получить два следующих уравнения:

$$\delta\dot{\hat{X}} = c/2\sqrt{N} \delta\hat{N}_1 + \hat{\xi}_a', \quad (4.38)$$

$$\delta\dot{\hat{Y}} = \hat{\xi}_a'', \quad \hat{\xi}_a = \hat{\xi}_a' + i\hat{\xi}_a''. \quad (4.39)$$

Теперь покажем, что $\delta\hat{X}$ и $\hat{\varepsilon}$ это с точностью до коэффициента одно и то же. Действительно,

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon} &= (\delta\hat{a}^\dagger + \sqrt{N})(\delta\hat{a} + \sqrt{N}) - N \approx \sqrt{N}(\delta\hat{a}^\dagger + \delta\hat{a}) = \\ &= 2\sqrt{N} \delta\hat{X}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Таким образом мы получаем систему из двух уравнений относительно двух переменных $\hat{\epsilon}$ $\delta\hat{N}_1$:

$$\delta\dot{\hat{N}}_1 = -\Gamma \delta\hat{N}_1 - C\hat{\epsilon} + \hat{\xi}_1(t), \quad \Gamma = \gamma_1 + cN, \quad (4.41)$$

$$\delta\dot{\hat{\epsilon}} = cN \delta\hat{N}_1 + \hat{\xi}_\epsilon, \quad \hat{\xi}_\epsilon = 2\sqrt{N} \hat{\xi}'_a. \quad (4.42)$$

Здесь стохастические источники выражаются через исходные в форме:

$$\hat{\xi}_1 = \hat{F}_1 + c/\gamma_2 \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{F}_2 - g/\gamma_\perp (\hat{a}^\dagger \hat{F}_p + \hat{a} \hat{F}_p^\dagger), \quad (4.43)$$

$$\hat{\xi}_\epsilon/\sqrt{N} = (\hat{F}_a^\dagger + \hat{F}_a) + g/\gamma_\perp (\hat{F}_p^\dagger + \hat{F}_p) - c/\gamma_2 (\hat{a}^\dagger \hat{F}_2^\dagger + \hat{F}_2 \hat{a}). \quad (4.44)$$

Теперь, что касается флуктуации другой квадратуры. Для малых флуктуаций мы можем отождествить эти флуктуации с фазовыми:

$$\delta Y = \frac{\delta\varphi}{\sqrt{N}}. \quad (4.45)$$

Нетрудно увидеть, что флуктуации этой величины нарастают со временем неограниченно по закону диффузии $\langle \delta Y^2 \rangle = Dt$. Но мы помним, что в наших приближениях мы имеем право рассматривать ситуацию, ограничиваясь достаточно малым временным интервалом t , пока диффузия фазы не успевает сказываться на движении других параметров.

Принимая во внимание соотношения между полуклассическими параметрами и корреляционные соотношения для исходных источников, можем получить ненулевые корреляционные функции в виде:

$$\langle \hat{\xi}_\epsilon(t) \hat{\xi}_\epsilon(t') \rangle = N(C + cN_{1,cl.}) \delta(t - t'), \quad (4.46)$$

$$\langle \hat{\xi}_1(t) \hat{\xi}_1(t') \rangle = \Gamma N_{1,cl.} (2 - p) \delta(t - t'), \quad (4.47)$$

$$\langle \hat{\xi}_\epsilon(t) \hat{\xi}_1(t') \rangle = -cNN_{1,cl.} \delta(t - t'). \quad (4.48)$$

И средние от нормально-упорядоченных операторов имеют вид:

$$\langle : \hat{\xi}_\epsilon(t) \hat{\xi}_\epsilon(t') : \rangle = 2cNN_{1,cl.} \delta(t - t'), \quad (4.49)$$

$$\langle : \hat{\xi}_1(t) \hat{\xi}_1(t') : \rangle = \Gamma N_{1,cl.} (2 - p) \delta(t - t'), \quad (4.50)$$

$$\langle : \hat{\xi}_\epsilon(t) \hat{\xi}_1(t') : \rangle = -2cNN_{1,cl.} \delta(t - t'). \quad (4.51)$$

4.4 Спектральное представление уравнений

Далее нам удобно перейти на спектральный язык с помощью Фурье-преобразования, вводя вместо временной зависимости частотную. Фурье преобразование, которое связывает функцию $\Lambda(t)$ с ее спектральным образом Λ_ω , дается интегральными соотношениями

$$\Lambda_\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(t) e^{i\omega t} dt, \quad \Lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda_\omega e^{-i\omega t} d\omega, \quad (4.52)$$

Введем в рассмотрение спектральные плотности $(\xi_\epsilon^2)_\omega$, $(\xi_S^2)_\omega$ и $(\xi_1 \xi_S)_\omega$ как множители перед дельта-функциями в функциях корреляций:

$$\langle \hat{\xi}_{\epsilon\omega} \hat{\xi}_{\epsilon\omega'} \rangle = (\xi_\epsilon^2)_\omega \delta(\omega + \omega'), \quad (4.53)$$

$$\langle \hat{\xi}_{1\omega} \hat{\xi}_{1\omega'} \rangle = (\xi_1^2)_\omega \delta(\omega + \omega'), \quad (4.54)$$

$$\langle \hat{\xi}_{\epsilon\omega} \hat{\xi}_{1\omega'} \rangle = \langle \hat{\xi}_{1\omega} \hat{\xi}_{\epsilon\omega'} \rangle = (\xi_1 \xi_\epsilon)_\omega \delta(\omega + \omega'). \quad (4.55)$$

Принимая во внимание малость флуктуаций для числа атомов на верхнем лазерном уровне и для числа фотонов в резонаторе, учитывая стационарные полуклассические решения задачи, мы сможем записать спектральные мощности источников шума в следующем виде:

$$\begin{aligned} (\xi_\epsilon^2)_\omega &= 2CN, & (\xi_1^2)_\omega &= C/c \Gamma(2-p), \\ (\xi_1 \xi_\epsilon)_\omega &= -CN. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Аналогичным образом спектральные мощности для нормально упорядоченных величин даются формулами

$$\begin{aligned} (: \xi_\epsilon^2 :)_\omega &= 2CN, & (: \xi_1^2 :)_\omega &= C/c \Gamma(2-p), \\ (: \xi_1 \xi_\epsilon :)_\omega &= -2Cn. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Применим к уравнениям (4.41)-(4.42) фурье-преобразование, тогда получим следующую алгебраическую систему уравнений для соответствующих спектральных компонент:

$$-i\omega \delta \hat{N}_{1\omega} = -\Gamma \delta \hat{N}_{1\omega} - Cx \hat{\epsilon}_\omega + \hat{\xi}_{1\omega}, \quad (4.58)$$

$$-i\omega \hat{\epsilon}_\omega = cN \delta \hat{N}_{1\omega} + \hat{\xi}_{\epsilon\omega}. \quad (4.59)$$

Система легко решается, вследствие чего получим интересное нас равенство для флуктуации поля в виде:

$$\hat{\varepsilon}_\omega = \frac{1}{-i\omega(\Gamma - i\omega) + cNC} \left(cN \hat{\xi}_{1\omega} + (\Gamma - i\omega) \hat{\xi}_{c\omega} \right) \quad (4.60)$$

По аналогии со спектральными мощностями стохастических источников введем спектральную плотность поля $(\delta\varepsilon^2)_\omega$:

$$\langle \hat{\varepsilon}_\omega \hat{\varepsilon}_{\omega'} \rangle = (\varepsilon^2)_\omega \delta(\omega + \omega'), \quad (4.61)$$

и нормально упорядоченную спектральную плотность $(:\delta\varepsilon^2:)_\omega$:

$$\langle : \hat{\varepsilon}_\omega \hat{\varepsilon}_{\omega'} : \rangle = (: \varepsilon^2 :)_\omega \delta(\omega + \omega'). \quad (4.62)$$

Теперь мы можем выразить спектральную плотность шумов генерации через спектральные мощносты источников:

$$(\varepsilon^2)_\omega = \frac{1}{|-i\omega(\Gamma - i\omega) + cNC|^2} \times \left[c^2 N^2 (\xi_1^2)_\omega + (\Gamma^2 + \omega^2) (\xi_c^2)_\omega + 2\Gamma cN (\xi_c \xi_1)_\omega \right] \quad (4.63)$$

Подставляя сюда спектральные мощносты шума, получим

$$(\varepsilon^2)_\omega = 2CN \frac{(\omega^2 + \Gamma^2) - pcN\Gamma/2}{(\omega^2 - cNC)^2 + \omega^2\Gamma^2}, \quad (4.64)$$

Точно так же можно рассчитать спектральную плотность для нормально упорядоченных операторов:

$$(:\varepsilon^2:)_\omega = 2CN \frac{\omega^2 + \Gamma^2 - \Gamma cN(1 + p/2)}{(\omega^2 - cNC)^2 + \omega^2\Gamma^2}. \quad (4.65)$$

Что касается детектирования излучения в рамках операторных представлений, то напомним следующее. Согласно (3.24) спектр фототока выражался следующей формулой

$$(\delta i^2)_\omega = CN \left[1 + C/N (\varepsilon^2)_\omega \right]. \quad (4.66)$$

Однако, там речь шла об неоператорной величине $\varepsilon = |\alpha^2|^2 - N$. В гейзенберговой же теории мы оперируем с величиной $\hat{\varepsilon} = \hat{a}^\dagger \hat{a} - N$. При этом правильная формула для спектра фототока будет иметь вид:

$$(\delta i^2)_\omega = CN \left[1 + C/N (: \varepsilon^2 :)_\omega \right]. \quad (4.67)$$

Литература

- [1] M. O. Scully, M. S. Zubairy, Quantum Optics, Cambridge University Press (1997)
- [2] Y. M. Golubev and I. V. Sokolov, Sov. Phys. JETP **60**, 234 (1984)
- [3] C. Benkert, M. O. Scully, J. Bergou, L. Davidovich, M. Hillery, and M. Orszag, Phys. Rev. A **41**, 2756 (1990).
- [4] M. I. Kolobov, L. Davidovich, E. Giacobino, and C. Fabre, Phys. Rev. A **47**, 1431 (1993)
- [5] С. Чандрасекар, Стохастические проблемы в физике и астрономии, ИЛ, М. (1947)
- [6] Ю. Л. Климонтович, П. С. Ланда, ЖЭТФ, **56**, 275 (1969)