

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(СПбГУ)

Кафедра Общей Физики I
Направление «Физика»



**УЧЕТ ТЕПЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ В СХЕМЕ МНОГОМОДОВОЙ
КВАНТОВОЙ ПАМЯТИ**

Бакалаврская работа студента
Зинатуллина Эдуарда Рустемовича

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. профессор Голубев Ю. М.

Рецензент:
к.ф.-м.н. Курашцев А. С.

Санкт-Петербург
2018

Оглавление

Введение	4
1 Обзор литературы	7
1.1 Типы квантовой памяти	7
1.1.1 Квантовой памяти для одиночных фотонов	7
1.1.2 Квантовой памяти для световых импульсов	8
1.2 Критерии работы квантовой памяти	8
1.2.1 Верность и эффективность	8
1.2.2 Время хранения	9
1.2.3 Многомодовость и полоса пропускания	9
1.3 Протоколы квантовой памяти	10
1.3.1 Электромагнитная индуцированная прозрачность	10
1.3.2 Адиабатическая и быстрая квантовая память	10
1.3.3 Рамановская память	11
2 Протокол быстрой резонансной квантовой памяти	12
2.1 Описание протокола	12
2.2 Сигнальное поле	13
2.3 Гамильтониан взаимодействия	15
2.4 Система уравнений Гейзенберга	17
2.5 Решение системы уравнений	18
3 Сохранение сжатия при учете теплового движения на этапе хранения	22
3.1 Собственные функции полного цикла памяти без учета этапа хранения и функции отклика среды	22
3.2 Учет продольного движения атомов на этапе хранения	24
3.3 Импульс сжатого света от одномодового субпуасоновского лазера с захватом фазы	27
3.4 Сохранение сжатия при продольном движении атомов	28
Заключение	30
А Приложение	31
А.1 Решение системы уравнений	31
А.2 Доказательство ортонормированности набора функций отклика среды	35

Введение

Наиболее перспективными носителями квантовой информации с точки зрения информационных и телекоммуникационных приложений являются импульсы света. Благодаря наличию различных степеней свободы (частоты, поляризации, орбитального углового момента и других), они легко поддаются мультиплексированию, т.е. на их основе удается реализовать несколько независимых каналов информации. Они распространяются с максимально возможной скоростью (скоростью света). И кроме того, их сравнительно легко сгенерировать. Однако они обладают и своими недостатками, и одной их главных проблем их использования является сложность их хранения.

В случае, когда с помощью оптических импульсов передают классическую информацию, используют волоконно-оптические линии задержки и оптические резонаторы. Однако в случае передачи квантовой информации из-за несовершенства приборов и процесса декогеренции, вызванного взаимодействием с окружающей средой, время их хранения оказывается существенно ограниченным. Поэтому широко применяется подход, когда квантово-статистические свойства света переносятся на “долгоживущие” степени свободы другой физической системы. В широком смысле под квантовой памятью понимают некоторый физический прибор, основанный на таком подходе. Квантовая память способна записывать, сохранять, а затем воспроизводить информацию с учетом всех ее квантово-статистических особенностей.

Квантовая память является неотъемлемым элементом многих разрабатываемых информационных и телекоммуникационных приложений. Одним из них является создание детерминированных источников одиночных фотонов. Такие источники широко используются в задачах квантовой криптографии, и, кроме того, с их помощью можно создавать поля с требуемыми квантово-статистическими свойствами. Другим не менее важным приложением квантовой памяти является создание квантовых повторителей. С их помощью можно будет решить проблему передачи квантовой информации на большие расстояния. И, разумеется, своё применение квантовая память также найдёт и при создании универсального квантового компьютера.

Заметим, что во всех перечисленных выше приложениях квантовая память выступает только в качестве устройства хранения квантовой информации, т.е. своего рода линии задержки квантового сигнала. Однако, в последнее время все большее внимание исследователей привлекает возможность использования ячеек квантовой памяти для преобразования сигнала и манипулирования им непосредственно внутри самой ячейки памяти [19, 20]. С этих позиций квантовая память уже становится элементом квантовых вычислительных цепей.

При физической реализации квантовой памяти существуют два разных подхода. В первом предполагается использование одиночного атома (молекулы или квазичастицы), помещенного в высокочастотный оптический резонатор [11]. Особенностью такого подхода является возможность работы с отдельным кубитом. Во втором подходе память реализуется уже не на одиночном атоме, а на атомном ансамбле. При этом запись происходит на коллективные состояния среды, и как следствие эффективность взаимодействия определяется ее оптической плотностью. Заметим, что второй подход позволяет получить большее время хранения сигнала и при наличии нескольких квантовых степеней свободы атомной среды может обладать большей информационной емкостью. В дальнейшем мы будем рассматривать только протоколы квантовой памяти, реализованные на атомных ансамблях.

Обычно при построении теоретической модели используется приближение холодных атомов, когда все атомы ансамбля, с которыми взаимодействуют световые импульсы, считаются неподвижными или их движением можно пренебречь. Это позволяет существенно упростить математическое описание происходящих физических процессов. Однако на практике получение ансамбля холодных атомов сопряжено со значительными трудностями. Кроме того, такие ансамбли трудно масштабировать, т.е. увеличивать размер ансамбля (оптическую плотность) с целью повышения информационной емкости. В отличие от них тепловые атомные ансамбли гораздо проще в приготовлении и они легче поддаются масштабированию. И хотя тепловые атомные ансамбли широко применяются при экспериментальной реализации протоколов квантовой памяти, посвященных им теоретических работ достаточно мало.

В нашей работе мы будем рассматривать протокол многомодовой быстрой квантовой памяти, основанный на резонансном взаимодействии коротких импульсов сигнального и управляющего полей с тепловым атомным ансамблем. Мы построим математическое описание этого протокола, учитывающее тепловое движение атомов. Мы будем считать, что времена записи и считывания малы, и поэтому будем учитывать тепловое движение только на этапе хранения. Затем мы проведем численный анализ полного цикла памяти, состоящего из этапов записи, хранения и считывания, на языке мод Шмидта в случае неподвижного ансамбля атомов, и найдём функции отклика среды, то есть пространственные профили распределения когерентности в атомной среде, возникающие в результате записи соответствующих временных мод. Считая, что атомы ансамбля подчиняются максвелловскому распределению по скоростям, мы учтем продольное тепловое движение атомов на этапе хранения как “размытие” образованных при записи собственных функций среды и проанализируем способность исследуемого протокола к сохранению широкополосных импульсов света при разных температурах атомного ансамбля.

Отдельно отметим, что обычно при рассмотрении протоколов квантовой памяти для оценки качества ее работы используют такие критерии, как верность (fidelity) или эффективность (efficiency), определение которых мы дадим ниже. Однако главной целью нашей работы будет исследование того, как квантовая память сохраняет так называемый квадратурно-сжатый свет, в качестве источника которого мы выберем субпуассоновский лазер с захватом фазы. Такой свет является важным ресурсом во многих приложениях квантовой оптики

и информатики, и, в частности, на его основе могут быть приготовлены кластерные состояния для реализации протоколов однонаправленных квантовых вычислений, которые мы планируем исследовать в наших дальнейших работах. Мы рассмотрим, как тепловое движение влияет на корреляционные свойства записанного внутрь ячейки памяти квадратурно-сжатого света.

Глава 1

Обзор литературы

Прежде чем перейти к основному содержанию работы, мы приведем краткий обзор литературы для того, чтобы ввести необходимые определения, которые нам потребуются в дальнейшем, а также кратко описать основные созданные на сегодня протоколы квантовой памяти и сравнить их с рассматриваемым в работе протоколом быстрой квантовой памяти.

1.1 Типы квантовой памяти

Часто квантовую память классифицируют в зависимости от способов ее использования в информационных приложениях, при этом выделяют память для одиночных фотонов и память для световых импульсов. Тем не менее, суть протекающих в них физических процессов одинакова для обоих типов памяти: при записи квантово-статистические свойства света отпечатываются на атомах среды, а затем при считывании происходит восстановление световой волны с близкими или – в идеальном случае – теми же свойствами.

1.1.1 Квантовой памяти для одиночных фотонов

Память для одиночных фотонов [9, 10] интересна тем, что позволяет с помощью одного фотона передать бит квантовой информации (кубит). Носителем информации при этом может выступать амплитуда, поляризация или орбитальный угловой момент фотона. Такая квантовая память находит свое применение при реализации однофотонных источников, некоторых протоколов квантовых повторителей и других устройствах, работа которых может быть описана с помощью физических величин, задаваемыми с помощью дискретных переменных.

Отметим, что для таких протоколов квантовой памяти характерны два вида ошибок: фотон вообще может быть не излучен или излученный фотон окажется в квантовом состоянии, отличном от сохраненного. В связи с этим для описания работы такого типа квантовой памяти вводят два различных критерия: эффективность, которая отвечает вероятности излучения фотона, и верность, которая характеризует перекрытие волновых функций записанного и восстановленного фотонов.

1.1.2 Квантовой памяти для световых импульсов

Другим типом квантовой памяти является память, позволяющая сохранить импульс света в некотором заранее неизвестном квантовом состоянии. Она позволяет сохранять квантовую информацию, закодированную в оптическом угловом моменте, амплитуде, поляризации и, кроме того, в фазе световых импульсов. Ее используют в тех информационных и телекоммуникационных протоколах, работа которых характеризуется уже с помощью физических величин, описываемых непрерывными переменными. В частности, ее применяют для сохранения гауссовских состояний света, среди которых мы выделим наиболее востребованные в современном оптическом эксперименте квадратурно-сжатые и квантово-запутанные состояния.

Поскольку квантово-статистические свойства импульсов определяются их яркостью, то есть количеством фотонов, которое они содержат, для описания работы такого типа памяти вводят критерий, который также называется эффективностью и выражает собой отношение числа фотонов в восстановленном импульсе к числу фотонов в импульсе, записанном в нее.

1.2 Критерии работы квантовой памяти

Теперь рассмотрим основные критерии работы протоколов квантовой памяти, некоторые из которых мы уже упоминали выше.

1.2.1 Верность и эффективность

Одним из важнейших критериев работы квантовой памяти является верность. Она характеризует перекрывание состояния записываемого сигнального поля с состоянием поля на выходе из ячейки памяти. В теории квантовой информации она обычно определяется как

$$F = \text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho'} \rho \sqrt{\rho'}},$$

где ρ – матрица плотности начального состояния поля на входе ячейки, а ρ' – матрица плотности, описывающее состояние поля на выходе из нее.

Отметим, что в случае памяти для одиночных фотонов говорят об условной верности, то есть верности, полученная при условии, что фотон на выходе из ячейки был излучен. Очевидно, что условная верность не является подходящим критерием для оценки памяти для световых импульсов. В этом случае используют безусловную верность.

В работе [22] было показано, что для передачи и хранения ансамбля когерентных состояний с гауссовым распределением в пределе бесконечно широкого распределения, $F = 50\%$ является минимальной граница верности, которую должен преодолеть любой протокол квантовой памяти.

Вторым важным критерием качества работы квантовой памяти является эффективность. В общем случае эффективность вводится как отношение среднего числа фотонов, полученных на выходе из ячейки к среднему числу фото-

нов, поданных на её вход [5]:

$$\eta = \frac{\langle \hat{a}_{out}^\dagger, \hat{a}_{out} \rangle}{\langle \hat{a}_{in}^\dagger, \hat{a}_{in} \rangle},$$

где \hat{a} и \hat{a}^\dagger операторы уничтожения и рождения фотонов сигнального поля соответственно на входе (индекс “in”) и выходе (индекс “out”) ячейки памяти.

В работе [21] был найден важный предел на нижнюю границу эффективности протокола квантовой памяти, согласно которому для сохранения квантово-статистических свойств гауссовских состояний света должно выполняться $\eta > 50\%$.

1.2.2 Время хранения

Одной из важнейших характеристик работы квантовой памяти является время хранения. Очевидно, что время хранения должно значительно превышать время записи и считывания из ячейки. В остальном требуемое от памяти время хранения целиком и полностью зависит от её приложений. Так, например, в телекоммуникационных протоколах оно должно быть меньше времени образования корреляции между системами получателя и отправителя, а для квантовых вычислений оно должно быть не меньше времени самих вычислений [6].

Конечно, в идеале хотелось бы, чтобы время хранения было неограниченно долгим, но на практике сделать это не представляется возможным в следствии процессов декогеренции. На данный момент при экспериментальной реализации протоколов квантовой памяти на атомных ансамблях время хранения уже превысило 100 мс [7].

1.2.3 Многомодовость и полоса пропускания

Обсуждая квантовую память, нельзя оставить в стороне вопрос, касающийся ее информационной емкости. Информационная емкость ячейки памяти во многом зависит от ее полосы пропускания и количества собственных мод среды, на которые мы можем переносить квантово-статистические свойства излучения.

На сегодняшний день большинство работ посвящено одномодовым моделям памяти. Однако, активно ведутся работы по разработке эффективных многомодовых протоколов, способных обеспечивать пространственную и временную мультипликативность, тем самым увеличив пропускную способность информационного канала за счет дополнительных квантовых степеней свободы [8].

Отметим, что некоторые многомодовые протоколы квантовой памяти позволяют записывать и считывать разные моды независимо друг от друга, что существенно расширяет возможные границы их использования [?].

Полоса пропускания определяет спектрально-частотные границы применения того или иного протокола квантовой памяти, и для эффективной передачи и хранения информации эти границы должны совпадать с соответствующим спектрально-частотным диапазоном излучения, которое мы хотим с его помощью сохранить. Ясно, что чем больше и богаче спектральный диапазон кванто-

вого канала, тем выше его пропускная способность, т.е. тем больше информации мы можем по нему передать за единицу времени.

1.3 Протоколы квантовой памяти

В этом разделе мы кратко обсудим некоторые протоколы квантовой памяти, основанные на взаимодействии квантового сигнального и классического управляющего полей с ансамблем атомов с Λ -конфигурацией энергетических уровней. Мы выделили эти протоколы, так как их математическая модель во многом напоминает протокол резонансной быстрой квантовой памяти, рассматриваемый в нашей работе, и мы хотим показать, в чем заключаются их отличия.

1.3.1 Электромагнитная индуцированная прозрачность

Эффект EIT (электромагнитной индуцированной прозрачности) состоит в том, что достигается прозрачность для импульса сигнального поля, действующего на одном из переходов, за счет включенного на другом переходе управляющего поля при одинаковых и небольших отстройках этих полей от верхнего уровня [12, 13]. Такая прозрачность сопровождается существенным уменьшением групповой скорости сигнального импульса (вплоть до полной остановки), что приводит к его пространственному сжатию. В случае, если это сжатие достаточно для того, чтобы импульс полностью уместился в среде, то управляющее поле отключается и сигнал полностью рассеивается на атомах среды, создавая когерентность между нижними уровнями. При повторном включении управляющего поля происходит считывание и образуется поле на частоте сигнального, несущее в себе его классические и квантовые свойства.

В памяти на эффекте EIT импульсы сигнального поля имеют большую длительность, что существенно ограничивает его частотный спектр и как следствие пропускную способность квантового информационного канала, включающего в себя такую ячейку. Это является одним из основных недостатков данного типа памяти.

1.3.2 Адиабатическая и быстрая квантовая память

В протоколе адиабатической квантовой памяти [15, 5] предполагается, что длительность сигнального импульса T значительно превышает величину $(d\gamma)^{-1}$, где γ^{-1} – время жизни возбужденного состояния, а d – оптическая толщина, но гораздо меньше времени установления прозрачности в среде. С одной стороны, как и в случае памяти на эффекте EIT, это позволяет исключить из рассмотрения возбужденные состояния среды, но при этом частично снимается ограничение на спектральную ширину полосы пропускания такой ячейки. Эффективность хранения такого протокола будет определяться не только оптической толщиной d , но и временем взаимодействия T [14].

Абсолютно другая ситуация возникает в протоколе быстрой квантовой памяти, где время импульса лежит в интервале $L/c \ll T \ll \gamma^{-1}$, где L – длина ячейки. Как следствие, мы можем пренебречь релаксационными эффектами

при записи и считывании, но в отличие от адиабатической памяти и памяти на основе ЕІТ верхний уровень будет динамически заселяться, что может служить источником потерь.

1.3.3 Рамановская память

Память основанная на эффекте рамановского рассеяния [16, 17, 18] (комбинационное рассеяние) в общих чертах похожа на память на эффекте ЕІТ, за тем исключением, что сигнальное и управляющее поля оказываются существенно отстроены от частот соответствующих им атомных переходов. При этом величины отстроек Δ выбираются одинаковыми и такими, что $\Delta \gg d\gamma$, где γ – спектральная ширина верхнего уровня, а d – оптическая толщина. Это приводит к качественно новому механизму хранения: большая отстройка препятствует реальному заселению верхнего энергетического уровня и вместо этого происходит двухфотонный процесс, при котором фотон сигнального импульса переводит атом с нижнего уровня канала сигнального поля на виртуальный уровень, после чего атом “подхватывается” управляющим полем и переходит на нижний уровень уже в его канале.

Глава 2

Протокол быстрой резонансной квантовой памяти

В нашей работе мы будем рассматривать протокол многомодовой быстрой квантовой памяти, основанный на резонансном взаимодействии коротких импульсов сигнального и управляющего полей с тепловым атомным ансамблем. Спектральная полоса пропускания этого протокола лучше всего совпадает со спектрально-частотными характеристиками импульса квадратурно-сжатого света, полученного в экспериментальной работе [23]. Нашей целью будет проследить за тем, как меняются квантово-статистические свойства такого импульса в процессе хранения.

2.1 Описание протокола

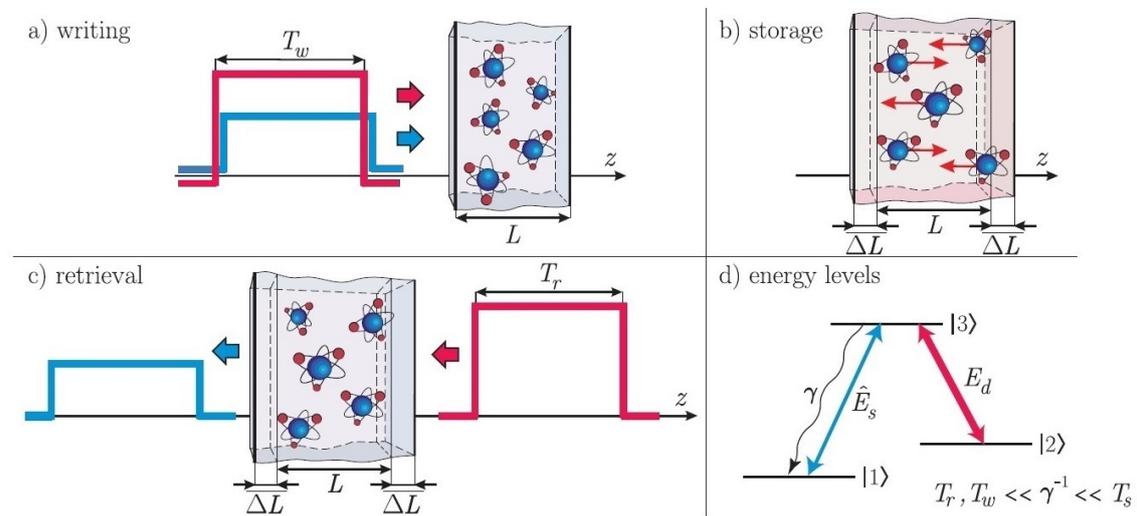


Рис. 2.1: Схематическое изображение полного цикла быстрой резонансной квантовой памяти: а) запись, б) хранение, с) считывание, d) схема энергетических уровней атома с действующими сигнальным \hat{E}_s и управляющим E_d полями.

Протокол быстрой квантовой памяти основывается на одновременном взаимодействии импульсов сигнального \hat{E}_s и управляющего E_d полей с ансамблем атомов, имеющих Λ -конфигурацию энергетических уровней. Нижние энергетические уровни атомов $|1\rangle$ и $|2\rangle$ выбираются долгоживущими, и их спонтанным распадом на протяжении всего цикла памяти можно пренебречь. Мы будем считать, что в начальный момент времени все атомы приготовлены в состоянии $|1\rangle$ с помощью оптической накачки. В нашей задаче атомный ансамбль представляет собой плоский бесконечный слой длины L , атомы внутри которого располагаются равномерно.

Цикл памяти состоит из трех последовательных этапов: записи, хранения и считывания – с длительностями T_w , T_s и T_r , соответственно. При этом для протокола быстрой квантовой памяти должно выполняться, что $T_w, T_r \ll \gamma^{-1} \ll T_s$, где γ^{-1} – время спонтанного распада с уровня $|3\rangle$ на уровень $|1\rangle$. Спонтанный распад с уровня $|3\rangle$ на уровень $|2\rangle$ мы не рассматриваем, выбрав для него время релаксации много большим по сравнению с γ^{-1} и T_s .

На этапе записи оба импульса одновременно подаются в ячейку. При этом слабое сигнальное поле переводит часть атомов с уровня $|1\rangle$ на уровень $|3\rangle$, а затем сильное опорное поле переводит атомы с уровня $|3\rangle$ на уровень $|2\rangle$. В результате образуется когерентность между уровнями $|1\rangle$ и $|2\rangle$, на которую “отпечатываются” квантово-статистические свойства сигнального поля.

За время хранения происходит “размытие” образовавшейся на этапе записи когерентности, вызванное тепловым движением атомов ансамбля. При этом атомы, оставшиеся на уровне $|3\rangle$ на момент окончания записи, в результате спонтанного распада переходят на уровень $|1\rangle$.

При считывании на противоположный вход ячейки подаётся импульс сильного управляющего поля, при взаимодействии с которым атомы с уровня $|2\rangle$ переходят на уровень $|1\rangle$ через верхний уровень $|3\rangle$. В результате происходит излучение фотонов в сигнальную моду, так что выходное поле несёт на себе свойства входного сигнала. Нами рассматривается именно случай обратного считывания, так как он гораздо эффективнее прямого [2].

2.2 Сигнальное поле

Пусть $\hat{E}_s(z, t)$ – оператор, описывающий слабое сигнальное квантовое поле. Он может быть представлен в виде разложения по плоским волнам в следующем виде:

$$\hat{E}_s(z, t) = -i \int \frac{dk}{2\pi} \sqrt{\frac{\hbar \omega(k)}{2\varepsilon_0}} \hat{a}(k) e^{i(kz - \omega(k)t)} + h.c.. \quad (2.2.1)$$

Здесь $\hat{a}^\dagger(k)$ и $\hat{a}(k)$ – операторы рождения и уничтожения фотонов с волновым вектором k соответственно. Для частоты $\omega(k)$ мы выбираем простейшее дисперсионное соотношение $\omega(k) = ck$, отвечающее распространению поля в свободном пространстве. Операторы рождения $\hat{a}^\dagger(k)$ и уничтожения $\hat{a}(k)$ под-

чиняются стандартным коммутационным соотношениям

$$[\hat{a}(k), \hat{a}^\dagger(k')] = 2\pi \delta(k - k'). \quad (2.2.2)$$

Для дальнейшего анализа введем медленно меняющиеся операторы рождения и уничтожения фотонов $\hat{a}^\dagger(z, t)$ и $\hat{a}(z, t)$ [3], так что

$$\hat{E}_s(z, t) = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\varepsilon_0 c}} \hat{a}(z, t) e^{i(k_s z - \omega_s t)} + h.c., \quad (2.2.3)$$

где ω_s – несущая частота сигнальной волны, а волновое число $k_s = \omega_s/c$. Тогда оператор $\hat{a}(z, t)$ задается выражением

$$\hat{a}(z, t) = \int \frac{dk}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega(k)}{k_s}} \hat{a}(k) e^{i((k-k_s)z - (\omega(k) - \omega_s)t)}. \quad (2.2.4)$$

Зная стандартные коммутационные соотношения для операторов рождения и уничтожения, получим коммутационные соотношения для введенных медленных амплитуд:

$$[\hat{a}(z, t), \hat{a}^\dagger(z', t)] = c \int \frac{dk}{2\pi} \frac{\omega(k)}{\omega_s} e^{i(k-k_s)(z-z')}. \quad (2.2.5)$$

Чтобы упростить это соотношение, воспользуемся стандартным приближением квазимонохроматичности, то есть:

$$\frac{\omega(k)}{\omega_0} \approx 1 + \frac{k - k_s}{k_s}. \quad (2.2.6)$$

Тогда получим, что

$$[\hat{a}(z, t), \hat{a}^\dagger(z', t)] \approx c \left(1 - \frac{i}{k_s} \frac{\partial}{\partial z} \right) \delta(z - z'), \quad (2.2.7)$$

$$[\hat{a}(z, t), \hat{a}^\dagger(z, t')] = \delta(t - t'). \quad (2.2.8)$$

Теперь можем получить уравнение, описывающее эволюцию оператора $\hat{a}(z, t)$ в свободном пространстве. Уравнение Гейзенберга для него имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{a}(z, t) = i\omega_s \hat{a}(z, t) + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_p(t), \hat{a}(z, t)], \quad (2.2.9)$$

где $\hat{H}_p(t)$ – гамильтониан электромагнитного поля в свободном пространстве, представленного бесконечным плоским слоем толщины L , и может быть записан как

$$\hat{H}_p(t) = \frac{\hbar\omega_0}{c} \int_L \hat{a}^\dagger(z, t) \hat{a}(z, t) dz. \quad (2.2.10)$$

Далее, используя полученные ранее коммутационные соотношения (2.2.7), преобразуем уравнение (2.2.9) к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{a}(z, t) = -c \frac{\partial}{\partial z} \hat{a}(z, t). \quad (2.2.11)$$

2.3 Гамильтониан взаимодействия

Теперь необходимо построить гамильтониан, описывающий взаимодействие ансамбля атомов с полем $\hat{E}(z, t)$. Так как размеры одного атома много меньше длин волн сигнального и управляющего полей, то в мультипольном разложении оператора взаимодействия мы можем ограничиться только первым членом ряда, то есть использовать приближение дипольного взаимодействия. В этом приближении гамильтониан взаимодействия поля $\hat{E}(z, t)$ с ансамблем атомов из N частиц с координатами $\{z_j(t)\}_{j=1}^N$ имеет вид

$$\hat{V} = -\hat{D}\hat{E} = -\sum_{j=1}^N \hat{d}_j \hat{E}(z_j(t), t) \quad (2.3.12)$$

где \hat{d}_j – дипольный момент j -ого атома.

В нашей задаче поле представляет собой сумму двух полей

$$\hat{E}(z, t) = \hat{E}_s(z, t) + E_d(z, t), \quad (2.3.13)$$

где \hat{E}_s – слабое квантовое сигнальное поле, которое мы ввели выше, а E_d – сильное классическое опорное поле

$$\begin{aligned} \hat{E}_s(z, t) &= -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\varepsilon_0 c}} e^{i(k_s z - \omega_s t)} \hat{a}(z, t) + h.c., \\ E_d(z, t) &= -i E_{d0} e^{i(k_d z - \omega_d t)} + c.c.. \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Оператор $\hat{D}(z, t)$ – оператор коллективного дипольного момента. Его можно представить в виде суммы операторов коллективных дипольных моментов, взаимодействующих с сигнальным и опорным полем

$$\hat{D}(z, t) = \hat{D}_d(z, t) + \hat{D}_s(z, t). \quad (2.3.15)$$

В свою очередь операторы $\hat{D}_d(z, t)$ и $\hat{D}_s(z, t)$ можно выразить в виде суммы операторов дипольных моментов отдельных атомов

$$\hat{D}_d(z, t) = \sum_{j=1}^N d_j^{32} |3\rangle\langle 2| \delta(z - z_j) e^{i\omega_{32}t} + h.c., \quad (2.3.16)$$

$$\hat{D}_s(z, t) = \sum_{j=1}^N d_j^{31} |3\rangle\langle 1| \delta(z - z_j) e^{i\omega_{31}t} + h.c.. \quad (2.3.17)$$

Здесь d_j^{31} и d_j^{32} – матричные элементы оператора дипольного момента j -ого атома для соответствующих переходов. Так как мы работаем с одним сортом атомов, то их величины для всех атомов мы можем считать одинаковыми и равными, т.е. $d_j^{31} = d_{31}$ и $d_j^{32} = d_{32}$ для любого значения j . Дельта функции учитывают положение атомов в среде. Такая запись позволяет представить гамильтониан взаимодействия в виде

$$\hat{V}(t) = -\int_L \hat{D}(z, t) \hat{E}(z, t) dz. \quad (2.3.18)$$

Будем полагать частоту опорного поля близкой к частоте перехода $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$, а частоту сигнального – к частоте перехода $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$. Обозначим соответствующие отстройки полей как $\Delta_{31} = \omega_{31} - \omega_s$ и $\Delta_{32} = \omega_{32} - \omega_d$. Мы используем приближение вращающейся волны и исключаем члены, действующие на удвоенной оптической частоте. Для гамильтониана взаимодействия получим

$$V(t) = \int_L dz \left[(i\hbar g \hat{a}(z, t) e^{i(k_s z - \Delta_{31} t)} \hat{\sigma}_{31}(z, t) + h.c.) + (i\hbar \Omega e^{i(k_d z - \Delta_{32} t)} \hat{\sigma}_{32}(z, t) + h.c.) \right], \quad (2.3.19)$$

где введены константа связи и частота Раби, которую мы будем считать вещественной,

$$g = \sqrt{\frac{\omega_s}{2\varepsilon_0 \hbar c}} d_{31}, \quad \Omega = \frac{E_{d0} d_{32}}{\hbar}. \quad (2.3.20)$$

В полученном выражении мы использовали операторы коллективной когерентности

$$\hat{\sigma}_{mn}(z, t) = \sum_{j=1}^N |m\rangle_j \langle n|_j \delta(z - z_j(t)), \quad (2.3.21)$$

коммутационные соотношения для которых имеют вид

$$[\hat{\sigma}_{mn}(z, t), \hat{\sigma}_{nm}(z', t)] = (\hat{N}_m(z) - \hat{N}_n(z)) \delta(z - z'). \quad (2.3.22)$$

$\hat{N}_m(z)$ – это операторы атомной заселенности соответствующих уровней:

$$\hat{N}_m(z) = \sum_{j=1}^N |m\rangle_j \langle m|_j \delta(z - z_j(t)). \quad (2.3.23)$$

Мы будем рассматривать случай резонансного взаимодействия световых полей с атомным ансамблем, поэтому отстройки по частотам мы кладем равными нулю: $\Delta_{31} = 0$ и $\Delta_{32} = 0$. Так же в дальнейшем нам удобно перейти к рассмотрению медленно меняющихся операторов когерентности, то есть $\hat{\sigma}_{mn} e^{ik_d z} \rightarrow \hat{\sigma}_{mn}$. С учетом всего вышесказанного выражение для гамильтониана взаимодействия (2.3.19) примет вид:

$$V(t) = i\hbar \int_L dz \left[(g \hat{a}(z, t) \hat{\sigma}_{31}(z, t) - g \hat{a}^\dagger(z, t) \hat{\sigma}_{13}(z, t)) + (\Omega \hat{\sigma}_{32}(z, t) - \Omega \hat{\sigma}_{23}(z, t)) \right]. \quad (2.3.24)$$

Стоит отметить, что операторы когерентности (2.3.21) и заселенности (2.3.23) представляют собой гребенку δ -функций Дирака со случайными расстояниями между пиками. Ансамбль содержит большое количество атомов, и мы можем усреднить эти операторы по положениям атомов, получив гладкие пространственные распределения для операторов когерентностей и заселенностей, тем самым упростив математическую постановку задачи.

2.4 Система уравнений Гейзенберга

Считая, что атомы ансамбля не взаимодействуют друг с другом мы можем разделить весь ансамбль на множество подансамблей, каждый из которых движется как единое целое со скоростью v_z вдоль оптической оси z , и записать систему уравнения Гейзенберга для каждого из них. Полученные решения для подансамбля мы усредним по скоростям с соответствующим статистическим весом и получим решение для всего ансамбля. Зависимости операторов от времени t и координаты z в дальнейшем мы будем опускать, чтобы не загромождать текст и выкладки.

Зная уравнение эволюции для оператора \hat{a}_{v_z} в свободном пространстве (2.2.11) и гамильтониан взаимодействия поля с ансамблем атомов (2.3.24), получим следующее уравнение Гейзенберга

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{a}_{v_z} = -g c \left(1 - \frac{i}{k_s} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\sigma}_{13 v_z}. \quad (2.4.25)$$

Так как когерентность $\hat{\sigma}_{13}$ – медленно меняющаяся величина, а для оптических переходов $k_s^{-1} \sim 10^{-7}$, мы можем пренебречь вторым членом в правой части уравнения. Так же пренебрежем развитием волновых фронтов, тогда оператор \hat{a}_{v_z} можно считать достаточно гладким и убрать в уравнении производную по времени. Это приближение справедливо в том случае, если пространственная протяженность импульса света cT (T – длительность импульса) много больше длины ячейки L , то есть $cT \gg L$. С учетом всех упомянутых приближений получим, что

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{a}_{v_z} = -g \hat{\sigma}_{13 v_z}. \quad (2.4.26)$$

Аналогичным образом получим уравнения на остальные операторы. При их выводе мы не использовали никаких дополнительных предположений. В итоге, мы получили полную систему уравнений Гейзенберга, описывающую эволюцию выделенного подансамбля и связанного с ним поля:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{N}_{1 v_z} = -g \left(\hat{a}_{v_z} \hat{\sigma}_{31 v_z} + \hat{a}_{v_z}^\dagger \hat{\sigma}_{13 v_z} \right), \quad (2.4.27)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{N}_{2 v_z} = -\Omega \left(\hat{\sigma}_{32 v_z} + \hat{\sigma}_{23 v_z} \right), \quad (2.4.28)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{N}_{3 v_z} = g \left(\hat{a}_{v_z} \hat{\sigma}_{31 v_z} + \hat{a}_{v_z}^\dagger \hat{\sigma}_{13 v_z} \right) + \Omega \left(\hat{\sigma}_{23 v_z} + \hat{\sigma}_{32 v_z} \right), \quad (2.4.29)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\sigma}_{12 v_z} = -g \hat{a}_{v_z} \hat{\sigma}_{32 v_z} - \Omega \hat{\sigma}_{13 v_z}, \quad (2.4.30)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\sigma}_{13 v_z} = -g \hat{a}_{v_z} \left(\hat{N}_{3 v_z} - \hat{N}_{1 v_z} \right) + \Omega \hat{\sigma}_{12 v_z}, \quad (2.4.31)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\sigma}_{23 v_z} = g \hat{a}_{v_z} \hat{\sigma}_{21 v_z} - \Omega \left(\hat{N}_{3 v_z} - \hat{N}_{2 v_z} \right), \quad (2.4.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{a}_{v_z} = -g \hat{\sigma}_{13 v_z}. \quad (2.4.33)$$

Сперва рассмотрим уравнение (2.4.30). В начальный момент времени все атомы были приготовлены в состоянии $|1\rangle$ и в результате взаимодействия с полем лишь малая их часть перешла в состояния $|2\rangle$ и $|3\rangle$. В связи с этим мы можем считать среднее от $\hat{\sigma}_{32v_z}$ малой величиной, в сравнении со средним от $\hat{\sigma}_{13v_z}$. Так как опорное поле является сильным классическим, а сигнальное – слабым квантовым, то среднее от величины $g\hat{a}_{v_z}$ значительно меньше частоты Раби Ω . Таким образом основной вклад в эволюцию спиновой когерентности вносит член $\Omega\hat{\sigma}_{13v_z}$, а второе слагаемое, отвечающее сигнальному полю, мы можем не учитывать:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \hat{\sigma}_{12v_z} = -\Omega \hat{\sigma}_{13v_z}. \quad (2.4.34)$$

Теперь перейдем к уравнению (2.4.31). Как уже говорилось ранее, основная часть атомов находится в состоянии $|1\rangle$ и мы можем пренебречь оператором \hat{N}_{3v_z} по сравнению с \hat{N}_{1v_z} , сделав при этом замену оператора на c -число, т.е. $\hat{N}_{1v_z} \rightarrow N_{v_z}$, где N_{v_z} – число атомов в рассматриваемом подансамбле. Тогда получим, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \hat{\sigma}_{13v_z} = gN_{v_z} \hat{a}_{v_z} + \Omega \hat{\sigma}_{12v_z}. \quad (2.4.35)$$

Таким образом, в приближении Холштейна-Примакова мы получаем замкнутую систему из трех уравнений, для которой мы вводим новые перенормированные операторы когерентностей

$$\hat{b}_{v_z}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{N_{v_z}}} \hat{\sigma}_{12v_z}(z, t), \quad \hat{c}_{v_z}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{N_{v_z}}} \hat{\sigma}_{13v_z}(z, t), \quad (2.4.36)$$

подчиняющиеся стандартным бозонным коммутационным соотношениям

$$[\hat{b}_{v_z}(z, t), \hat{b}_{v_z}^+(z', t)] = [\hat{c}_{v_z}(z, t), \hat{c}_{v_z}^+(z', t)] = \delta(z - z'). \quad (2.4.37)$$

Окончательно наша система уравнений, описывающая эволюцию системы на протяжении всего цикла памяти, примет вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{a}_{v_z} = -g\sqrt{N_{v_z}} \hat{c}_{v_z}, \quad (2.4.38)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \hat{b}_{v_z} = -\Omega \hat{c}_{v_z}, \quad (2.4.39)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \hat{\sigma}_{13v_z} = g\sqrt{N_{v_z}} \hat{a}_{v_z} + \Omega \hat{b}_{v_z}. \quad (2.4.40)$$

2.5 Решение системы уравнений

Теперь решим систему уравнений (2.4.38–2.4.40), полученную в предыдущем пункте, для разных этапов цикла памяти. Перед этим введем безразмерные

координату и время как

$$\tilde{t} = \Omega t, \quad \tilde{z} = \frac{2g^2 N_{v_z}}{\Omega} z. \quad (2.5.41)$$

Безразмерная координата \tilde{z} оказывается выраженной в единицах эффективной оптической толщины, отличающейся от истинной оптической толщины $d = 2g^2 N_{v_z} L / \gamma$ в $|\Omega / \gamma|$ раз, а безразмерное время \tilde{t} в единицах обратной частоты Раби Ω^{-1} .

В соответствии с (2.5.41) для безразмерной скорости мы получим:

$$\tilde{v}_z = \frac{2g^2 N_{v_z}}{\Omega^2} v_z. \quad (2.5.42)$$

Операторы поля $\hat{a}_{v_z}(z, t)$ и когерентностей $\hat{b}_{v_z}(z, t)$ и $\hat{c}_{v_z}(z, t)$ обезразмерим через соответствующие им коммутационные соотношения (2.2.8) и (2.4.37):

$$[\hat{a}_{v_z}(z, t), \hat{a}_{v_z}^+(z, t')] = \frac{1}{\Omega} \delta(t - t') = \delta(\tilde{t} - \tilde{t}'), \quad (2.5.43)$$

$$[\hat{b}_{v_z}(z, t), \hat{b}_{v_z}^+(z', t)] = [\hat{c}_{v_z}(z, t), \hat{c}_{v_z}^+(z', t)] = \frac{\Omega}{2g^2 N_{v_z}} \delta(z - z') = \delta(\tilde{z} - \tilde{z}'). \quad (2.5.44)$$

Отсюда получаем соотношения между размерными и безразмерными операторами

$$\hat{\tilde{a}}_{v_z}(\tilde{z}, \tilde{t}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \hat{a}_{v_z}(z, t), \quad (2.5.45)$$

$$\hat{\tilde{b}}_{v_z}(\tilde{z}, \tilde{t}) = \sqrt{\frac{\Omega}{2g^2 N_{v_z}}} \hat{b}_{v_z}(z, t), \quad (2.5.46)$$

$$\hat{\tilde{c}}_{v_z}(\tilde{z}, \tilde{t}) = \sqrt{\frac{\Omega}{2g^2 N_{v_z}}} \hat{c}_{v_z}(z, t). \quad (2.5.47)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только безразмерные величины, и поэтому знак “тильда” будем опускать.

Предположим, что за небольшие времена записи T_w и считывания T_r атомы существенно не смещаются и их можно рассматривать как неподвижные. При этом очевидно, что система уравнений для всего ансамбля неподвижных атомов будет совпадать с системой уравнений для подансамбля при $v_z = 0$. Тогда получим решение для этапа записи, связывающее амплитуду сигнального поля на входе ячейки памяти $\hat{a}_{in}(t)$ с образовавшейся к концу этапа когерентностью $\hat{b}(z, T_w)$,

$$\hat{b}(z, T_w) = - \int_0^{T_w} dt G_{ab}(z, t) \hat{a}_{in}(T_w - t) + vac(T_w), \quad (2.5.48)$$

$$G_{ab}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t dt' f_{ab}(z, t) f_{ab}^*(z, t - t'), \quad (2.5.49)$$

$$f_{ab}(z, t) = e^{-it} J_0(\sqrt{zt}) \Theta_{T_w}(t), \quad (2.5.50)$$

и для этапа считывания, связывающее когерентность в момент окончания этапа хранения $\hat{b}(z, T_w + T_s)$ с восстановленным при обратном считывании полем $\hat{a}_{out}(t)$,

$$\hat{a}_{out}(t) = - \int_0^L dz G_{ba}(z, t) \hat{b}(z, T_w + T_s) + vac(T_r), \quad (2.5.51)$$

$$G_{ba}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t dt' f_{ba}(z, t) f_{ba}^*(z, t - t'), \quad (2.5.52)$$

$$f_{ba}(z, t) = e^{-it} J_0(\sqrt{zt}) \Theta_{T_r}(t). \quad (2.5.53)$$

$J_0(\sqrt{zt})$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, а $\Theta_{T_w}(t)$ и $\Theta_{T_r}(t)$ – оконные функции, соответствующие этапам записи и считывания.

Здесь через $vac(T_w)$ и $vac(T_r)$ обозначены интегральные преобразования от подсистем находящихся при записи и считывании в вакуумном состоянии, а именно:

$$vac(T_w) = \int_0^z dz' G_{bb}(z', T_w) \hat{b}(z - z', 0) + \int_0^z G_{cb}(z', T_w) \hat{c}(z - z', 0), \quad (2.5.54)$$

$$vac(T_r) = \int_0^t dz' G_{aa}(t', t) \hat{a}_{vac}(t - t') - \int_0^z G_{ca}(z', t) \hat{c}(L - z', T_w + T_s), \quad (2.5.55)$$

где $G_{aa}(t', t)$, $G_{bb}(z, t)$, $G_{ca}(z, t)$ и $G_{cb}(z, t)$ – ядра записанных интегральных преобразований. Их явный вид приведен в приложении, но для дальнейших рассуждений они не потребуются. Так как в дальнейшем нам будут интересны только средние от произведения нормально упорядоченных операторов рождения и уничтожения, мы можем опустить $vac(T_w)$ и $vac(T_r)$ в выражениях (2.5.48) и (2.5.51) и перейти от операторов к соответствующим им аналитическим c -числовым функциям

$$b(z, T_w) = - \int_0^{T_w} dt G_{ab}(z, t) a_{in}(T_w - t), \quad (2.5.56)$$

$$a_{out}(t) = - \int_0^L dz G_{ba}(z, t) b(z, T_w + T_s). \quad (2.5.57)$$

Теперь рассмотрим этап хранения. Именно на нем мы учитываем продольное движение атомов, и поэтому мы вновь вернемся к рассмотрению подансамбля атомов, движущегося как целое со скоростью v_z . Так как $\gamma^{-1} \ll T_s$, то все атомы, оставшиеся на уровне $|3\rangle$ после этапа записи, в результате спонтанного распада переходят на уровень $|1\rangle$ в самом начале этапа хранения, и мы можем не рассматривать эволюцию когерентности $\hat{c}_{v_z}(z, t)$, полагая её равной нулю с самого начала. Тогда эволюция когерентности $\hat{b}_{v_z}(z, t)$ для подансамбля будет описываться уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{b}_{v_z}(z, t) = 0. \quad (2.5.58)$$

Его решение в момент окончания этапа хранения имеет вид

$$\hat{b}_{v_z}(z, T_w + T_s) = \hat{b}_{v_z}(z - v_z T_s, T_w). \quad (2.5.59)$$

За время хранения она смещается как целое на промежуток $v_z T_s$ без изменения вида самой зависимости. Таким образом, чтобы рассмотреть влияние теплового движения атомов на этапе хранения нам необходимо учесть вклад от каждого подансамбля атомов $\hat{b}_{v_z}(z, T_w + T_s)$ в когерентность всего ансамбля $\hat{b}(z, T_w + T_s)$. Как и раньше, мы перейдем от операторов к соответствующим им аналитическим функциям

$$b_{v_z}(z, T_w + T_s) = b_{v_z}(z - v_z T_s, T_w). \quad (2.5.60)$$

Глава 3

Сохранение сжатия при учете теплового движения на этапе хранения

3.1 Собственные функции полного цикла памяти без учета этапа хранения и функции отклика среды

Дальнейший анализ мы будем проводить на языке собственных значений и собственных функций полного цикла памяти. Из решений (2.5.56) и (2.5.57), считая что на этапе хранения система остается неизменной получаем интегральное преобразование, связывающее поля на входе в ячейку и выходе из неё

$$a_{out}(t) = \int_0^{T_w} dt' G(t, t') a_{in}(T_w - t'). \quad (3.1.1)$$

Здесь $G(t, t')$ – вещественное ядро интегрального оператора полного цикла, выражающееся через ядра интегральных операторов записи $G_{ab}(z, t)$ и считывания $G_{ba}(z, t)$ как

$$G(t, t') = \int_0^L dz G_{ab}(z, t) G_{ba}(z, t'). \quad (3.1.2)$$

Будем полагать время записи и считывания равными, то есть $T_w = T_r = T$. Тогда ядро оказывается симметричным относительно перестановки аргументов, и для него могут быть найдены собственные числа $\sqrt{\lambda_i}$ и собственные функции $\phi_i(t)$

$$\sqrt{\lambda_i} \phi_i(t) = \int_0^{T_w} dt' G(t, t') \phi_i(t'). \quad (3.1.3)$$

Собственные функции ядра образуют полный ортонормированный набор:

$$\int_0^{T_w} dt \phi_i(t) \phi_j(t) = \delta_{ij}, \quad (3.1.4)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(t) \phi_i(t') = \delta(t - t'). \quad (3.1.5)$$

Как следствие мы можем применить к ядру разложение Шмидта

$$G(t, t') = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \phi_i(t) \phi_i(t'). \quad (3.1.6)$$

Найдем собственные функции и собственные числа полного цикла памяти при параметрах $L = 10$ и $T = 5.5$. Такой выбор параметров обусловлен тем, что при нем достигается высокая эффективность сохранения света [2]. При этом первые две собственные функции оказываются выделенными за счет больших собственных чисел ($\sqrt{\lambda_1} = 1.00$, $\sqrt{\lambda_2} = 0.89$, $\sqrt{\lambda_3} = 0.09$, $\sqrt{\lambda_{>3}} \ll 1$), а значит, имеют высокую эффективность сохранения ($\lambda_1 = 1.0$ и $\lambda_2 = 0.8$, соответственно).

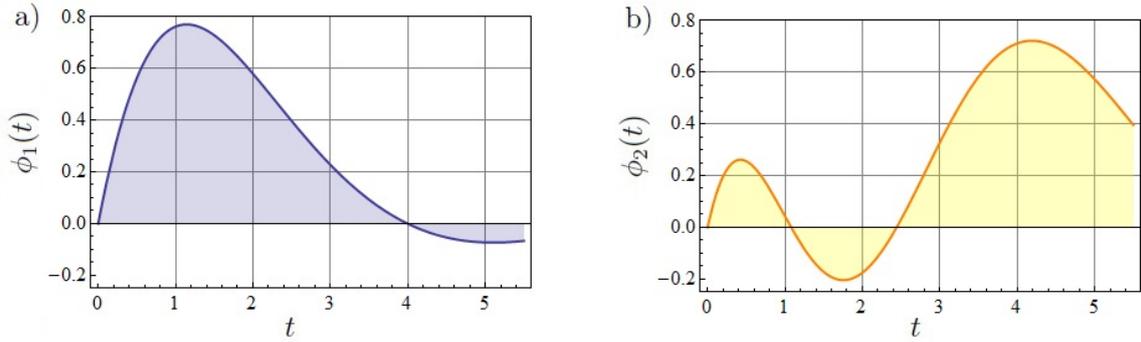


Рис. 3.1: Первые две собственные функции оператора полного цикла памяти: а) $\phi_1(t)$, б) $\phi_2(t)$.

Следующим шагом будет введение функций отклика среды $\{\psi_i(z)\}_{i=1}^{\infty}$, представляющих собой когерентности, образующиеся в среде в случае, когда на вход ячейки подается поле с обращенным временным профилем в виде одной из собственных функций

$$\sqrt[4]{\lambda_i} \psi_i(z) = \int_0^{T_w} dt G_{ab}(z, t) \phi_i(t). \quad (3.1.7)$$

Это преобразование мы будем называть полуциклом памяти.

В отличие от ядра $G(t, t')$ ядро $G_{ab}(z, t)$ не является симметричным по перестановке аргументов, поэтому для него мы не можем применить разложение Шмидта. Однако в силу полноты набора собственных функций $\{\phi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ и ортонормированности и полноты набора функций отклика $\{\psi_i(z)\}_{i=1}^{\infty}$, мы можем

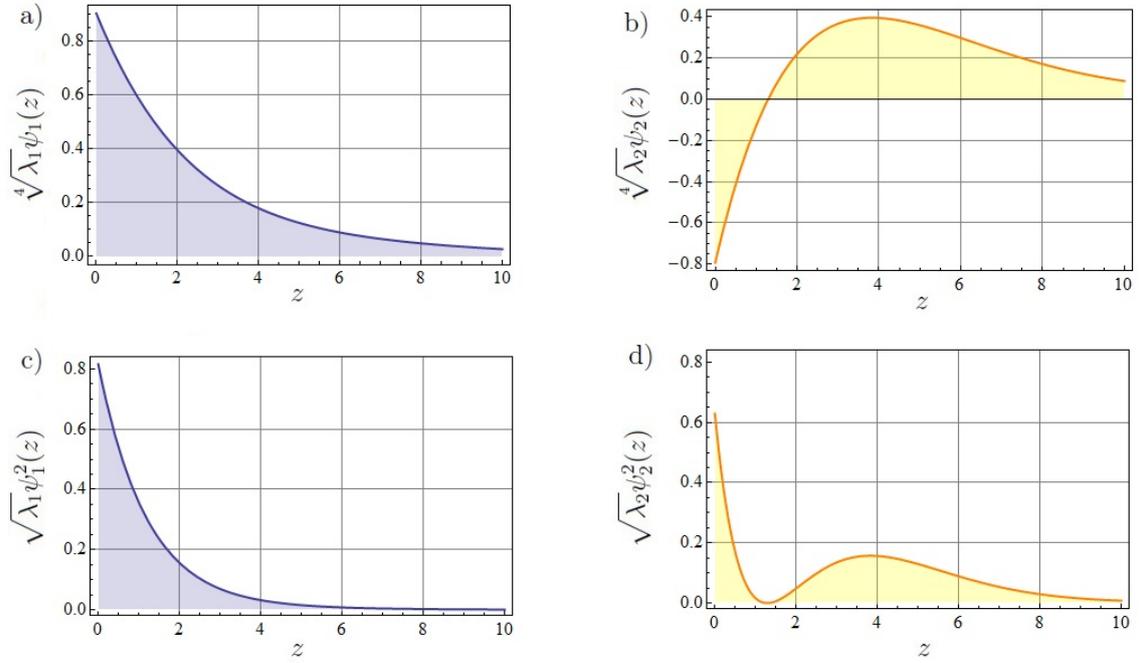


Рис. 3.2: Функции отклика среды для первых двух собственных функций: а) $\sqrt[4]{\lambda_1}\psi_1(z)$ и б) $\sqrt[4]{\lambda_2}\psi_2(z)$. Квадраты функций отклика: в) $\sqrt{\lambda_1}\psi_1^2(z)$ и д) $\sqrt{\lambda_2}\psi_2^2(z)$.

представить ядро полуцикла в виде ряда

$$G_{ab}(z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt[4]{\lambda_i}\psi_i(z)\phi_i(t). \quad (3.1.8)$$

Доказательство ортонормированности набора функций отклика среды вынесено в приложение.

3.2 Учет продольного движения атомов на этапе хранения

Теперь мы можем рассмотреть, как тепловое движение влияет на распределение когерентности $b(z)$ на этапе хранения. Поведение идеального газа может быть описано статистикой Максвелла-Больцмана в том случае, если его температура превышает температуру вырождения

$$\tau \gg \frac{n^{2/3}h^2}{3mk_b}, \quad (3.2.9)$$

где τ – температура, n – объемная концентрация, m – масса одной частицы, k_b – постоянная Больцмана, h – постоянная планка. Таким образом распределение

атомов по продольным скоростям будет описываться распределением Максвелла

$$dN_{v_z} = \frac{1}{\sqrt{\pi}u_z} \exp\left(-\frac{v_z^2}{u_z^2}\right) du_z. \quad (3.2.10)$$

Здесь u_z – наиболее вероятная скорость продольного движения, а dN_{v_z} – число атомов со скоростями принадлежащими промежутку $(v_z, v_z + dv_z)$.

Перепишем выражение (2.5.59) для подансамбля атомов, движущихся со скоростью v_z как единое целое, связывающее когерентность на момент начала этапа хранения и по его окончанию для i -ой функции отклика среды. Получим

$$\sqrt[4]{\lambda_i} \psi_i(z) \Big|_{v_z, t=T_w+T_s} = \sqrt[4]{\lambda_i} \psi_i(z - v_z T_s) \Big|_{v_z, t=T_w}. \quad (3.2.11)$$

Далее перейдем ко всему ансамблю атомов с максвелловским распределением по скоростям. При этом мы учитываем вклады от каждого подансамбля с соответствующим статвесом и усредняем эти вклады по всему ансамблю:

$$\sqrt[4]{\lambda_i} \psi_i(z) \Big|_{u_z, t=T_w+T_s} = \frac{\sqrt[4]{\lambda_i}}{\sqrt{\pi}u_z} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \psi_i(z)(z - v_z T_s) \Big|_{v_z, t=T_w}. \quad (3.2.12)$$

Запишем среднее смещение атомов за время хранения в результате теплового движения

$$\overline{\Delta L} = T_s u_z. \quad (3.2.13)$$

Оно характеризует температуру ансамбля при фиксированном времени хранения (или наоборот). С целью сокращения записи перейдем от обозначения $\psi_i(z) \Big|_{u_z, t=T_w+T_s}$ к обозначению $\psi_i(z; \overline{\Delta L})$.

Безразмерная координата \tilde{z} выражается в единицах эффективной оптической длины (ненадолго вернем ей “тильду”), которая зависит от концентрации атомов n . Изначально концентрация атомов однородна на промежутке $z \in [0, L]$ и равна нулю вне его, но в результате теплового движения концентрация меняется и становится некоторой функцией $n(z)$ на промежутке $z \in (-\infty, +\infty)$. Такое изменение повлечет и изменение определения безразмерной координаты, поэтому мы переопределим безразмерную координату так, чтобы она по-прежнему выражалась в единицах оптической длины. Так же отметим, что в результате продольного движения оптическая толщина (как реальная, так и эффективная) не меняется. Таким образом мы вводим новую безразмерную координату \bar{z} , определенную на том же интервале $\bar{z} \in [0, \tilde{L}]$. Для этого выполняется процедура перемасштабирования.

Идея перемасштабирования заключается в том, чтобы найти преобразование, связывающее новую \bar{z} и старую \tilde{z} безразмерные координаты: $\bar{z} = f(\tilde{z})$ так, чтобы новая концентрация $\bar{n}(\bar{z})$ вновь была однородна. Так как число частиц в ансамбле не меняется, мы можем записать равенство

$$\int_{\bar{z}_1}^{\bar{z}_2} d\bar{z} \bar{n}(\bar{z}) = \int_{\tilde{z}_1}^{\tilde{z}_2} d\tilde{z} n(\tilde{z}). \quad (3.2.14)$$

С учетом, что $\bar{z} = f(\tilde{z})$ и $d\bar{z} = f'(\tilde{z})d\tilde{z}$, получим

$$\int_{\bar{z}_1}^{\bar{z}_2} d\tilde{z} f'(\tilde{z})\bar{n}(f(\tilde{z})) = \int_{\tilde{z}_1}^{\tilde{z}_2} d\tilde{z} n(\tilde{z}). \quad (3.2.15)$$

Отсюда имеем

$$f'(\tilde{z}) = \frac{n(\tilde{z})}{\bar{n}(f(\tilde{z}))}. \quad (3.2.16)$$

В нашем случае $n(\tilde{z})$ является константой, а $n(f(\tilde{z}))$ находится с помощью усреднения по Максвеллу $n(\tilde{z})$, а $\bar{z}_1 = f(\tilde{z}_1)$ и $\bar{z}_2 = f(\tilde{z}_2)$. Таким образом мы получаем дифференциальное уравнения первого порядка, которое решается численно.

Мы можем рассчитать, как изменятся функции отклика среды, найденные в предыдущем пункте, при различных средних смещениях атомов за время хранения. На рис. 3.3 приведены зависимости для первых двух функций отклика среды в случае, когда в среднем за этап хранения атомы смещаются на $\overline{\Delta L} = 2$ (пятая часть длины ячейки) и на $\overline{\Delta L} = 10$ (длина всей ячейки).

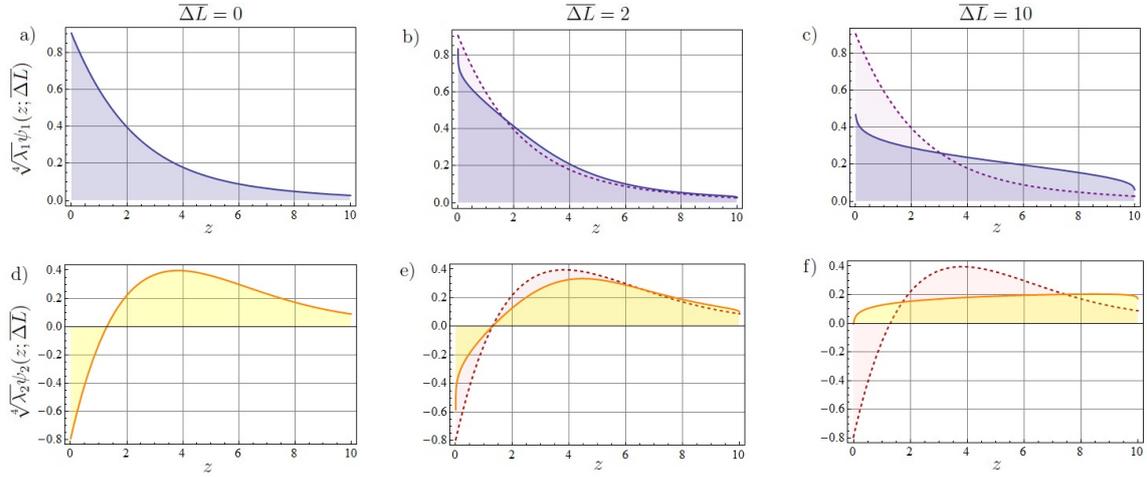


Рис. 3.3: “Размытые” функции отклика. Рисунки a), b), c) соответствуют $\sqrt[4]{\lambda_1}\psi_1(z; \overline{\Delta L})$; рисунки d), e), f) соответствуют $\sqrt[4]{\lambda_2}\psi_2(z; \overline{\Delta L})$. Рисунки a), d) отвечают $\overline{\Delta L} = 0$ (неподвижные атомы); рисунки b), e) отвечают $\overline{\Delta L} = 2$; рисунки c), f) отвечают $\overline{\Delta L} = 10$. Пунктирные кривые соответствуют $\overline{\Delta L} = 0$ и приведены для удобства сравнения.

Как итог мы можем получить “размытое” ядро полуцикла с учетом этапа хранения, заменив в выражении (3.1.8) исходные функции отклика $\sqrt[4]{\lambda_i}\psi_i(z)$ на измененные функции отклика $\sqrt[4]{\lambda_i}\psi_i(z; \overline{\Delta L})$ в ходе хранения:

$$G_{ab}(z, t; \overline{\Delta L}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt[4]{\lambda_i}\psi_i(z; \overline{\Delta L})\phi_i(t), \quad (3.2.17)$$

и соответственно для ядра полного цикла

$$G(t, t'; \overline{\Delta L}) = \int_0^L dz G_{ab}(z, t)G_{ba}(z, t'; \overline{\Delta L}). \quad (3.2.18)$$

Теперь, зная ядро интегрального преобразования $G(t, t'; \overline{\Delta L})$ связывающее поле на входе ячейки $a_{in}(t)$ с полем на выходе $a_{out}(t)$ и учитывающее этап хранения, мы можем анализировать, как изменяются свойства записанного света в зависимости от среднего смещения атомов за время хранения $\overline{\Delta L}$.

3.3 Импульс сжатого света от одномодового субпуассоновского лазера с захватом фазы

В качестве источника входного поля $a_{in}(t)$ мы будем рассматривать одномодовый субпуассоновский лазер с захватом фазы [4]. Среднеквадратичные внутрирезонаторные флуктуации квадратур такого лазера при работе в стационарном режиме описываются соотношениями

$$\langle : \delta \hat{x}_\omega^2 : \rangle = -\frac{p(1-\mu)}{4} \frac{\kappa^2}{\kappa^2(1-\mu/2)^2 + \omega^2}, \quad (3.3.19)$$

$$\langle : \delta \hat{y}_\omega^2 : \rangle = -\frac{1-\mu}{2} \frac{\kappa}{\kappa^2\mu^2/4 + \omega^2}. \quad (3.3.20)$$

Обозначение $\langle : \cdot : \rangle$ указывает на нормальный порядок операторов. Параметр p , принадлежащий промежутку $[0, 1]$, задает статистику возбуждения активной среды: при $p = 0$ – статистика возбуждения совершенно случайная (пуассоновская), а при $p = 1$ – строго регулярная (субпуассоновская); κ имеет смысл спектральной ширины моды излучения лазера. Параметр $\mu = \sqrt{n_0/n}$ характеризует долю среднего числа фотонов синхронизирующего поля n_0 в полной мощности выходного излучения n . При этом $\mu \ll 1$ для того, чтобы синхронизирующее излучение не разрушало статистику поля генерации. Так как сжатие проявляется в \hat{x} -кватратуре, то в дальнейшем мы будем отслеживать только её флуктуации.

Теперь необходимо математически описать процедуру вырезания импульса сжатого света. Для этого применим к (3.3.19) обратное преобразование Фурье и перейдем во временное представление

$$\langle : \delta \hat{x}(t) \delta \hat{x}(t') : \rangle = -\kappa \frac{p}{8} \frac{1-\mu}{1-\mu/2} e^{-\kappa(1-\mu/2)|t-t'|}. \quad (3.3.21)$$

Корреляционная функция для флуктуации квадратуры на выходе из резонатора $\delta \hat{X}$ будет связана с корреляционной функцией внутрирезонаторных флуктуаций квадратуры $\delta \hat{x}$ соотношением

$$\langle \delta \hat{X}(t) \delta \hat{X}(t') \rangle = \frac{1}{4} \delta(t-t') + \langle : \delta \hat{x}(t) \delta \hat{x}(t') : \rangle. \quad (3.3.22)$$

Здесь первое слагаемое справа относится к дробовому шуму.

Не стоит забывать, что в моменты времени, когда сигнальный импульс длительности T отсутствует, поле находится в вакуумном состоянии, что выражается как

$$\hat{a}(t) \rightarrow \Theta^T(t) \hat{a}(t) + (1 - \Theta^T(t)) \hat{a}_{vac}(t), \quad (3.3.23)$$

индекс “vac” означает, что оператор должен быть усреднен по вакуумному состоянию при измерении наблюдаемых величин. $\Theta^T(t)$ – оконная функция, такая что

$$\Theta^T(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, T] \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}.$$

Таким образом с учетом конечности импульса получим

$$\langle \Theta_T(t) \delta \hat{X}(t) \Theta_T(t') \delta \hat{X}(t') \rangle = \frac{1}{4} \Theta_T(t) \Theta_T(t') \delta(t - t') + \langle : \Theta_T(t) \delta \hat{x}(t) \Theta_T(t') \delta \hat{x}(t') : \rangle. \quad (3.3.24)$$

Теперь осталось узнать спектр такого импульса. Для этого применим к выражению (3.3.24) преобразование Фурье по ограниченному временному интервалу $[0, T]$. Для произвольной функции $F(t)$ с носителем на этом интервале оно определено как

$$F_\omega^T = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T dt F(t) e^{i\omega t}. \quad (3.3.25)$$

Для спектра сжатия исходного импульса найдем

$$4 \langle \delta \hat{X}_\omega^T \delta \hat{X}_{-\omega}^T \rangle = 1 - \frac{p\kappa^2(1-\mu)}{\kappa_x^2 + \omega^2} + \frac{p\kappa^2(1-\mu)}{2\kappa_x T} \left(\frac{1}{(\kappa_x - i\omega)^2} (1 - e^{-\kappa_x T + i\omega T}) + c.c. \right), \quad (3.3.26)$$

$$\kappa_x = \kappa(1 - \mu/2).$$

Отметим, что при вырезании импульсов из стационарного светового потока должно выполняться условие $\kappa T \gg 1$, чтобы сохранялось сжатое состояние света.

3.4 Сохранение сжатия при продольном движении атомов

Теперь проанализируем, как сохраняется сжатие импульса света в нашей модели памяти. Согласно (3.1.1), с учетом введения “размытых” ядер полного цикла (3.2.18) и для нормального порядка операторов корреляционные функции для сигнального импульса при записи и считывании во временном представлении связаны друг с другом соотношением

$$\begin{aligned} \langle : \delta \hat{x}_{out}(t) \delta \hat{x}_{out}(t') : \rangle &= \\ &= \int_0^{T_w} dt_1 \int_0^{T_w} dt_2 \langle : \delta \hat{x}_{in}(T_w - t_1) \delta \hat{x}_{in}(T_w - t_2) : \rangle G(t, t_1; \overline{\Delta L}) G(t', t_2; \overline{\Delta L}). \end{aligned} \quad (3.4.27)$$

Здесь корреляционная функция для входного сигнала задается выражением (3.3.21). При этом для ядра полного цикла памяти в случае неподвижных атомов полагается $G(t, t') = G(t, t'; 0)$. Применим к (3.4.27) преобразование Фурье

по ограниченному временному промежутку (3.3.25) и получим

$$\begin{aligned} \langle : \delta \hat{x}_{out \omega} \delta \hat{x}_{out -\omega} : \rangle &= \\ &= \int_0^{T_w} dt_1 \int_0^{T_w} dt_2 \langle : \delta \hat{x}_{in}(T_w - t_1) \delta \hat{x}_{in}(T_w - t_2) : \rangle G(\omega, t_1; \overline{\Delta L}) G(-\omega, t_2; \overline{\Delta L}). \end{aligned} \quad (3.4.28)$$

Для импульса света после выхода из ячейки памяти корреляционная функция флуктуаций \hat{X} -квадратуры будет

$$\langle \delta \hat{X}_{out \omega} \delta \hat{X}_{out -\omega} \rangle = \frac{1}{4} + \langle : \delta \hat{x}_{out \omega} \delta \hat{x}_{out -\omega} : \rangle. \quad (3.4.29)$$

На рис. 3.4 приведены численные расчеты для спектров сжатия выходного импульса в случае неподвижных атомов ($\overline{\Delta L} = 0$ – синяя кривая) и при их средних смещениях $\overline{\Delta L} = 2$ (зеленая кривая) и $\overline{\Delta L} = 10$ (красная кривая), а также приведен спектр сжатия исходного импульса (пунктирная черная кривая). В качестве параметров сжатия исходного излучения были выбраны параметры $\kappa = 10/5.5$ и $p = 1$. Выбор κ обусловлен экспериментальными возможностями существующих субпуассоновских лазеров [23], что отвечает условию $\kappa T \gg 1$. Параметр p выбран из соображений, что нас интересует случай строго регулярной накачки.

Импульс на входе

$$4 \langle \delta \hat{X}_\omega \delta \hat{X}_{-\omega} \rangle_{in} \quad \text{---}$$

Импульс на выходе

$$\overline{\Delta L} = 0 \quad \text{---}$$

$$\overline{\Delta L} = 2 \quad \text{---}$$

$$\overline{\Delta L} = 10 \quad \text{---}$$

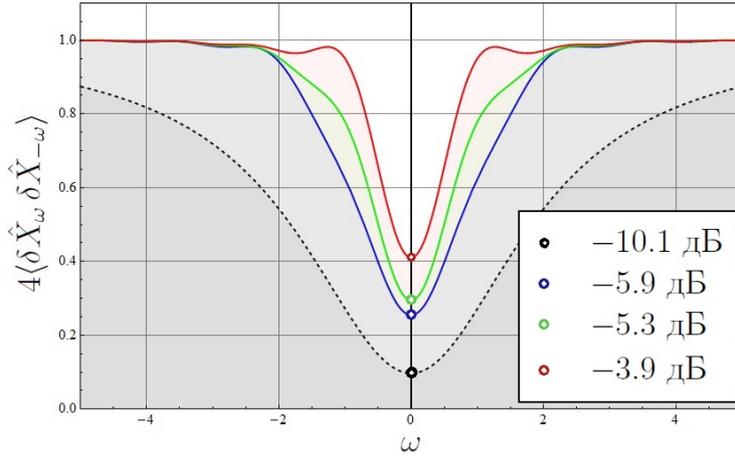


Рис. 3.4: Спектры сжатия входного импульса и выходных импульсов для разных средних смещений атомов за время хранения. Максимальное сжатие для каждого из них, выраженное в децибелах.

Для нас представляет интерес сжатие на нулевой частоте, что соответствует сжатию импульса как целого. Как видно из рис. 3.4, именно оно определяет максимально возможную степень сжатия. Для удобства выразим степень сжатия на нулевой частоте $\langle \delta X_0^2 \rangle$ в децибелах по формуле

$$\langle \delta X_0^2 \rangle_{db} = 10 \log_{10} \frac{\langle \delta X_0^2 \rangle}{A_0}, \quad (3.4.30)$$

где в качестве базисной величины A_0 возьмем значение дробового шума, то есть $1/4$. Полученные при этом результаты также приведены на рис. 3.4.

Заключение

В данной работе мы продолжили исследования, начатые в работе [1], и получили следующие результаты:

1. Модель быстрой резонансной квантовой памяти была обобщена на случай продольного теплового движения атомов. Рассмотрение продольного движения связано с тем, что временная зависимость поля переходит в продольную координату спиновой волны внутри ячейки памяти. Была решена система уравнений Гейзенберга для подансамбля атомов, движущихся со скоростью v_z как единое целое вдоль оптической оси.
2. Для случая неподвижных атомов были найдены собственные функции (моды Шмидта) и собственные значения ядра интегрального преобразования полного цикла памяти, связывающего сигнальное поле при записи с восстановленным полем при считывании. Получены функции отклика среды, которые представляют собой пространственное распределение когерентности, возникающее в результате записи одной из мод Шмидта (т.е. сигнального поля, обращенный временной профель которого совпадает с соответствующей модой).
3. Мы учли тепловое движение атомов на этапе хранения как “размытие” образовавшихся в результате записи функций отклика среды, и численно нашли “размытые” функции отклика для средних смещений атомов равных $\overline{\Delta L} = 2$ и $\overline{\Delta L} = 10$.
4. Мы проанализировали, как сохраняется импульс широкополосного сжатого света в такой модели, и получили спектры сжатия для указанных выше средних смещений атомов.

Некоторые из этих результатов повторяют результаты работы [1], а некоторые являются новыми и будут дополнены и опубликованы.

Мы можем заключить, что даже при сравнительно большом среднем смещении атомов внутри ячейки квантовой памяти степень сжатия импульса останется на достаточно высоком уровне. Нашими дальнейшими планами исследований будет являться оптимизация процесса хранения с помощью выбора подходящего профиля управляющего поля. Мы надеемся, что это позволит увеличить степень сжатия импульса на выходе из ячейки памяти. Кроме того, мы рассмотрим поперечное движение атомов ячейки и проанализируем, как сохраняется квантовое оптическое изображение на тепловом атомном ансамбле.

Приложение А

Приложение

А.1 Решение системы уравнений

В безразмерных величинах в системе отсчета, движущейся со скоростью v_z , система уравнений (2.4.38–2.4.40) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{a}(z, t) = -\hat{c}(z, t), \quad (\text{A.1.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{b}(z, t) = -\hat{c}(z, t), \quad (\text{A.1.2})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{c}(z, t) = \hat{a}(z, t) + \hat{b}(z, t). \quad (\text{A.1.3})$$

Отметим, что здесь мы опустили индекс у операторов, чтобы дальнейшие выкладки не были столь громоздки. С этой же целью будем обозначать свертку функций $f(z, t)$ и $g(z, t)$ по времени как

$$f(z, t) * g(z, t) = \int_0^t f(z, t - t') g(z, t') dt', \quad (\text{A.1.4})$$

а по координате как

$$f(z, t) \bar{*} g(z, t) = \int_0^z f(z - z', t) g(z', t) dz'. \quad (\text{A.1.5})$$

Запишем преобразование Лапласа от функции $f(x, y)$ по переменной x :

$$F_x(\xi, y) = \int_0^{+\infty} dx f(x, y) e^{-\xi x}. \quad (\text{A.1.6})$$

Нижний индекс здесь означает, по какой из координат было взято преобразование. Применим к системе (А.1.1-А.1.3) преобразование Лапласа по координате и времени, тогда

$$\zeta \hat{A}_{zt}(\zeta, \tau) - \hat{A}_t(0, \tau) = -\hat{C}_{zt}(\zeta, \tau), \quad (\text{A.1.7})$$

$$\tau \hat{B}_{zt}(\zeta, \tau) - \hat{B}_z(\zeta, 0) = -\hat{C}_{zt}(\zeta, \tau), \quad (\text{A.1.8})$$

$$\tau \hat{C}_{zt}(\zeta, \tau) - \hat{C}_z(\zeta, 0) = \hat{A}_{zt}(\zeta, \tau) + \hat{B}_{zt}(\zeta, \tau). \quad (\text{A.1.9})$$

Отсюда мы можем выразить образы операторов:

$$\hat{A}_{tz}(\zeta, \tau) = \frac{\tau^2 + 1}{\zeta(\tau^2 + 1) + \tau} \hat{A}_t(0, \tau) - \frac{1}{\zeta(\tau^2 + 1) + \tau} \hat{B}_z(\zeta, 0) - \frac{\tau}{\zeta(\tau^2 + 1) + \tau} \hat{C}_z(\zeta, 0), \quad (\text{A.1.10})$$

$$\hat{B}_{tz}(\zeta, \tau) = -\frac{1}{\zeta(\tau^2 + 1) + \tau} \hat{A}_t(0, \tau) + \frac{(\tau\zeta + 1)}{\zeta(\tau^2 + 1) + \tau} \hat{B}_z(\zeta, 0) - \frac{\zeta}{\zeta(\tau^2 + 1) + \tau} \hat{C}_z(\zeta, 0), \quad (\text{A.1.11})$$

$$\hat{C}_{tz}(\zeta, \tau) = \frac{\tau}{\zeta(\tau^2 + 1) + \tau} \hat{A}_t(0, \tau) + \frac{\zeta}{\zeta(\tau^2 + 1) + \tau} \hat{B}_z(\zeta, 0) + \frac{\tau\zeta}{\zeta(\tau^2 + 1) + \tau} \hat{C}_z(\zeta, 0). \quad (\text{A.1.12})$$

Теперь поочередно возьмем обратные преобразования Лапласа. Сначала по координате

$$\begin{aligned} \hat{A}_t(z, \tau) &= \exp\left(-\frac{\tau z}{\tau^2 + 1}\right) \hat{A}_t(0, \tau) - \frac{1}{\tau^2 + 1} \exp\left(-\frac{\tau z}{\tau^2 + 1}\right) \bar{*}\hat{b}(z, 0) - \\ &\quad - \frac{\tau}{\tau^2 + 1} \exp\left(-\frac{\tau z}{\tau^2 + 1}\right) \bar{*}\hat{c}(z, 0), \end{aligned} \quad (\text{A.1.13})$$

$$\begin{aligned} \hat{B}_t(z, \tau) &= -\frac{1}{\tau^2 + 1} \hat{A}_t(0, \tau) \exp\left(-\frac{\tau}{\tau^2 + 1} z\right) + \frac{\tau}{\tau^2 + 1} \hat{b}(z, 0) + \\ &\quad \frac{1}{(\tau^2 + 1)^2} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau^2 + 1} z\right) \bar{*}\hat{b}(z, 0) - \frac{1}{\tau^2 + 1} \hat{c}(z, 0) + \\ &\quad \frac{\tau}{(\tau^2 + 1)^2} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau^2 + 1} z\right) \bar{*}\hat{c}(z, 0), \end{aligned} \quad (\text{A.1.14})$$

$$\begin{aligned} \hat{C}_t(z, \tau) &= \frac{\tau}{\tau^2 + 1} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau^2 + 1} z\right) \hat{A}_t(0, \tau) + \frac{1}{\tau^2 + 1} \hat{b}(z, 0) - \\ &\quad - \frac{\tau}{(\tau^2 + 1)^2} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau^2 + 1} z\right) \bar{*}\hat{b}(z, 0) + \frac{\tau}{\tau^2 + 1} \hat{c}(z, 0) - \\ &\quad - \frac{\tau^2}{(\tau^2 + 1)^2} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau^2 + 1} z\right) \bar{*}\hat{c}(z, 0), \end{aligned} \quad (\text{A.1.15})$$

а затем по времени

$$\begin{aligned}
\hat{a}(z, t) = & e^{-it} \left(\delta(t) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{z}{t}} J_1(\sqrt{zt}) \right) * e^{it} \left(\delta(t) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{z}{t}} J_1(\sqrt{zt}) \right) * \hat{a}(0, t) - \\
& - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-it} J_0(\sqrt{zt}) * e^{it} J_0(\sqrt{zt}) * \hat{b}(z, 0) \\
& - \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(e^{-it} J_0(\sqrt{zt}) * e^{it} \left(\delta(t) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{z}{t}} J_1(\sqrt{zt}) \right) \right) + \\
& + e^{-it} \left(\delta(t) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{z}{t}} J_1(\sqrt{zt}) \right) * e^{it} J_0(\sqrt{zt}) * \hat{c}(z, 0), \tag{A.1.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{b}(z, t) = & - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-it} J_0(\sqrt{zt}) * e^{it} J_0(\sqrt{zt}) \right) * \hat{a}(0, t) + \\
& + \frac{1}{2} \left(e^{-it} 2\sqrt{\frac{t}{z}} J_1(\sqrt{\tilde{z}t}) * e^{it} 2\sqrt{\frac{t}{z}} J_1(\sqrt{zt}) \right) * \hat{b}(z, 0) + \\
& + \frac{1}{4} \left(e^{-it} 2\sqrt{\frac{t}{z}} J_1(\sqrt{zt}) * e^{it} J_0(\sqrt{zt}) + \right. \\
& \left. + e^{-it} J_0(\sqrt{zt}) * e^{it} 2\sqrt{\frac{t}{z}} J_1(\sqrt{zt}) \right) * \hat{c}(z, 0) + \\
& + \cos(t) \hat{b}(z, 0) - \sin(t) \hat{c}(z, 0), \tag{A.1.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{c}(z, t) = & \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(e^{-it} J_0(\sqrt{zt}) * e^{it} \left(\delta(t) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{z}{t}} J_1(\sqrt{zt}) \right) \right) + \\
& + e^{-it} \left(\delta(t) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{z}{t}} J_1(\sqrt{zt}) \right) * e^{it} J_0(\sqrt{zt}) * \hat{a}(0, t) - \\
& - \frac{1}{4} \left(e^{-it} 2\sqrt{\frac{t}{z}} J_1(\sqrt{zt}) * e^{it} J_0(\sqrt{zt}) + \right. \\
& \left. + e^{-it} J_0(\sqrt{zt}) * e^{it} 2\sqrt{\frac{t}{z}} J_1(\sqrt{zt}) \right) * \hat{b}(z, 0) - \\
& - \frac{1}{8} \left(e^{-it} 2\sqrt{\frac{t}{z}} J_1(\sqrt{zt}) * e^{it} \left(\delta(t) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{z}{t}} J_1(\sqrt{zt}) \right) \right) + \\
& + 2e^{-it} J_0(\sqrt{zt}) * e^{it} J_0(\sqrt{zt}) + \\
& + e^{-it} \left(\delta(t) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{z}{t}} J_1(\sqrt{zt}) \right) * e^{it} 2\sqrt{\frac{t}{z}} J_1(\sqrt{zt}) * \hat{c}(z, 0) + \\
& + \sin(t) \hat{b}(z, 0) + \cos(t) \hat{c}(z, 0). \tag{A.1.18}
\end{aligned}$$

Определим новые функции

$$f_{-1}(z, t) = e^{-it} \left(\delta(t) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{z}{t}} J_1(\sqrt{zt}) \right) \Theta(t), \quad (\text{A.1.19})$$

$$f_0(z, t) = e^{-it} J_0(\sqrt{zt}) \Theta(t), \quad (\text{A.1.20})$$

$$f_1(z, t) = e^{-it} 2 \sqrt{\frac{t}{z}} J_1(\sqrt{zt}) \Theta(t). \quad (\text{A.1.21})$$

Тогда (A.1.16-A.1.18) переписутся как

$$\begin{aligned} \hat{a}(z, t) = & f_{-1}(z, t) * f_{-1}^*(z, t) * \hat{a}(0, t) - \frac{1}{\sqrt{2}} f_0(z, t) * f_0^*(z, t) \bar{*} \hat{b}(z, 0) - \\ & - \frac{1}{2\sqrt{2}} (f_0(z, t) * f_{-1}^*(z, t) + f_{-1}(z, t) * f_0^*(z, t)) \bar{*} \hat{c}(z, 0), \end{aligned} \quad (\text{A.1.22})$$

$$\begin{aligned} \hat{b}(z, t) = & - \frac{1}{\sqrt{2}} (f_0(z, t) * f_0^*(z, t)) * \hat{a}(0, t) + \frac{1}{2} (f_1(z, t) * f_1^*(z, t)) \bar{*} \hat{b}(z, 0) + \\ & + \frac{1}{4} (f_1(z, t) * f_0^*(z, t) + f_0(z, t) * f_1^*(z, t)) \bar{*} \hat{c}(z, 0) + \\ & + \cos(t) \hat{b}(z, 0) - \sin(t) \hat{c}(z, 0), \end{aligned} \quad (\text{A.1.23})$$

$$\begin{aligned} \hat{c}(z, t) = & \frac{1}{2\sqrt{2}} (f_0(z, t) * f_{-1}^*(z, t) + f_{-1}(z, t) * f_0^*(z, t)) * \hat{a}(0, t) - \\ & - \frac{1}{4} (f_1(z, t) * f_0(z, t) + f_0(z, t) * f_1(z, t)) \bar{*} \hat{b}(z, 0) - \\ & - \frac{1}{8} (f_1(z, t) * f_{-1}(z, t) + 2f_0(z, t) * f_0(z, t) + f_{-1}(z, t) * f_1(z, t)) \bar{*} \hat{c}(z, 0) + \\ & + \sin(t) \hat{b}(z, 0) + \cos(t) \hat{c}(z, 0). \end{aligned} \quad (\text{A.1.24})$$

Окончательно получаем, что решения системы уравнений (A.1.1-A.1.3) для случайных граничных условий имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{a}(z, t) = & \int_0^t dt' G_{aa}(z, t') \hat{a}(0, t - t') - \int_0^z dz' G_{ba}(z, t') \hat{b}(z - z', 0) - \\ & - \int_0^z dz' G_{ca}(z, t') \hat{c}(z - z', 0), \end{aligned} \quad (\text{A.1.25})$$

$$\begin{aligned} \hat{b}(z, t) = & - \int_0^t dt' G_{ab}(z, t') \hat{a}(0, t - t') + \frac{1}{2} \int_0^z dz' G_{bb}(z, t') \hat{b}(z - z', 0) + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^z dz' G_{cb}(z, t') \hat{c}(z - z', 0), \end{aligned} \quad (\text{A.1.26})$$

$$\begin{aligned} \hat{c}(z, t) = & \int_0^t dt' G_{ac}(z, t') \hat{a}(0, t - t') + \frac{1}{2} \int_0^z dz' G_{bc}(z, t') \hat{b}(z - z', 0) + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^z dz' G_{cc}(z, t') \hat{c}(z - z', 0), \end{aligned} \quad (\text{A.1.27})$$

где ядра соответствующих интегральных преобразований выражаются следующими функциями:

$$G_{aa}(z, t) = f_{-1}(z, t) * f_{-1}^*(z, t), \quad (\text{A.1.28})$$

$$G_{ba}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} f_0(z, t) * f_0^*(z, t), \quad (\text{A.1.29})$$

$$G_{ca}(z, t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} (f_0(z, t) * f_{-1}^*(z, t) + f_{-1}(z, t) * f_0^*(z, t)), \quad (\text{A.1.30})$$

$$G_{ab}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (f_0(z, t) * f_0^*(z, t)), \quad (\text{A.1.31})$$

$$G_{bb}(z, t) = (f_1(z, t) * f_1^*(z, t)) + 2\delta(z) \cos(t), \quad (\text{A.1.32})$$

$$G_{cb}(z, t) = \frac{1}{2} (f_1(z, t) * f_0^*(z, t) + f_0(z, t) * f_1^*(z, t)) - 2\delta(z) \sin(t), \quad (\text{A.1.33})$$

$$G_{ac}(z, t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} (f_0(z, t) * f_{-1}^*(z, t) + f_{-1}(z, t) * f_0^*(z, t)), \quad (\text{A.1.34})$$

$$G_{bc}(z, t) = -\frac{1}{2} (f_1(z, t) * f_0(z, t) + f_0(z, t) * f_1(z, t)) + 2\delta(z) \sin(t), \quad (\text{A.1.35})$$

$$G_{cc}(z, t) = -\frac{1}{4} (f_1(z, t) * f_{-1}(z, t) + 2f_0(z, t) * f_0(z, t) + f_{-1}(z, t) * f_1(z, t)) + 2\delta(z) \cos(t). \quad (\text{A.1.36})$$

А.2 Доказательство ортонормированности набора функций отклика среды

Рассмотрим скалярное произведение i -ой и j -ой функций отклика, воспользовавшись при этом их определением (3.1.7):

$$\sqrt[4]{\lambda_i} \sqrt[4]{\lambda_j} \int_0^L dz \psi_i(z) \psi_j(z) = \int_0^L \int_0^{T_w} \int_0^{T_w} dz dt dt' G_{ab}(t', z) G_{ab}(t, z) \phi_i(t') \phi_j(t). \quad (\text{A.2.37})$$

Используем определение ядра полного цикла (3.1.2) с учетом, что $G_{ab}(z, t) = G_{ba}(z, t)$ при $T_w = T_s$, тогда

$$\sqrt[4]{\lambda_i} \sqrt[4]{\lambda_j} \int_0^L dz \psi_i(z) \psi_j(z) = \int_0^{T_w} \int_0^{T_w} dt dt' G(t, t') \phi_i(t') \phi_j(t). \quad (\text{A.2.38})$$

Теперь воспользуемся разложением Шмидта (3.1.6) для ядра $G(t, t')$, а затем ортонормированностью набора собственных функций (3.1.4):

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{\lambda_i} \sqrt[4]{\lambda_j} \int_0^L dz \psi_i(z) \psi_j(z) &= \sqrt{\lambda_i} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^{T_w} dt \phi_l(t) \phi_i(t) \int_0^{T_w} dt' \phi_l(t') \phi_j(t') = \\ &= \sqrt{\lambda_i} \sum_{l=1}^{\infty} \delta_{li} \delta_{lj} = \sqrt{\lambda_i} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.2.39})$$

Откуда окончательно получаем, что

$$\int_0^L dz \psi_i(z) \psi_j(z) = \delta_{ij}. \quad (\text{A.2.40})$$

Таким образом набор функций отклика среды $\{\psi_i(z)\}_{i=1}^{\infty}$ является ортонормированным. Свойство полноты этого набора вытекает из линейности интегрального преобразования (3.1.7) и полноты набора собственных функций $\{\phi_i(z)\}_{i=1}^{\infty}$.

Литература

- [1] К.С. Тихонов. Модовый анализ квантовой памяти на холодных и теплых атомных ансамблях: Диссертация на ... канд. физ.-мат. наук // С-Пб гос. университет, Санкт-Петербург, 2015
- [2] T. Golubeva, Yu. Golubev, O. Mishina, A. Bramati, J. Laurat, and E. Giacobino. High speed spatially multimode Λ -type atomic memory with arbitrary frequency detuning // *Eur. Phys. J. D.* – 2012. – Vol. 66. – P. 275.
- [3] M.I. Kolobov. The spatial behavior of nonclassical light // *Rev. Mod. Phys.* – 1999. – Vol. 71. – No. 5. – P. 1539–1589.
- [4] K. Samburskaya, T. Golubeva, V. Averchenko, Y. Golubev. Quadrature Squeezing in an Isolated Pulse of Light // *Opt. Spectrosc.*– 2012. – Vol. 113(1). – P. 86-95.
- [5] A.V. Gorshkov, A. Andr'e, M.D. Lukin, and A.S. Sorensen. Photon storage in Λ -type optically dense atomic media. III. Effects of inhomogeneous broadening // *Phys. Rev. A.* – 2007. – Vol. 76. – P. 033806.
- [6] N. Sangouard, C. Simon, H. de Riedmatten, and N. Gisin. Quantum repeaters based on atomic ensembles and linear optics // *Rev. Mod. Phys.* – 2011. – Vol.83. – P. 33.
- [7] C. Simon et al. Quantum memories // *Eur. Phys. J. D.* – 2010. – Vol. 58. – P. 1–22.
- [8] D.V. Vasilyev, I.V. Sokolov, and E.S. Polzik. Quantum memory for images: A quantum hologram // *Phys. Rev. A.* – 2008. – Vol. 77. – P. 020302(R).
- [9] A. Kuzmich, W.P. Bowen, A.D. Boozer, A. Boca, C.W. Chou, L.-M. Duan and H.J. Kimble. Generation of nonclassical photon pairs for scalable quantum communication with atomic ensembles // *Nature.* – 2003. – Vol. 423. – P. 731-734.
- [10] W. Jiang, C. Han, P. Xue, L.-M. Duan, and G.-C. Guo. Nonclassical photon pairs generated from a room-temperature atomic ensemble // *Phys. Rev. A.* – 2004. – Vol. 69. – P. 043819.
- [11] H.P. Specht, C. Nolleke, A. Reiserer, M. Uphoff, E. Figueroa, S. Ritter and Gerhard Rempe. A single-atom quantum memory // *Nature.* – 2011. – Vol. 473. – P. 190–193.

- [12] M.D. Lukin. Colloquium: Trapping and manipulating photon states in atomic ensembles // *Rev. Mod. Phys.* – 2003. – Vol. 75. – P. 457.
- [13] M. Fleischhauer, A. Imamoglu, and J.P. Marangos. Electromagnetically induced transparency: Optics in coherent media // *Rev. Mod. Phys.* – 2005. – Vol. 77. – P. 633.
- [14] К.С. Самбурская, Т.Ю. Голубева, Ю.М. Голубев, Е. Giacobino. Квантовая голография при резонансном адиабатическом взаимодействии полей с атомной средой в Λ -конфигурации // *Опт. и Спектр.* – 2011. – Том 110. – № 5. – С. 827-839.
- [15] K. Tikhonov, K. Samburskaya, T. Golubeva, and Yu. Golubev. Storage and retrieval of squeezing in multimode resonant quantum memories // *Phys. Rev. A.* – 2014. – Vol. 89. – P. 013811.
- [16] A.V. Gorshkov, A. Andr'e, M.Fleischhauer, A.S. Sorensen, and M.D. Lukin. Universal Approach to Optimal Photon Storage in Atomic Media // *Phys. Rev. Lett.* – 2007. – Vol. 98. – P. 123601.
- [17] A.E. Kozhokin, K. Molmer, and E. Polzik. Quantum memory for light // *Phys. Rev. A.* – 2000. – Vol. 62. – P. 033809.
- [18] J. Nunn, I.A. Walmsley, M.G. Raymer, K. Surmacz, F.C. Waldermann, Z. Wang, and D. Jaksch. Mapping broadband single-photon wave packets into an atomic memory // *Phys. Rev. A.* – 2007. – Vol. 75. – P. 011401(R).
- [19] G.T. Campbell et al. // *Phys. Rev. Lett.* – 2014. – Vol. 113. – P. 063601.
- [20] S. A. Moiseev, S. N. Andrianov // *Opt. Spectr.* – 2016. – Vol. 121(6). – P. 886.
- [21] M.M. Wolf, D. Perez-Garcia, G. Giedke. Quantum Capacities of Bosonic Channel // *Phys. Rev. Lett.* – 2007. – Vol. 99. – P. 130501.
- [22] N. J. Cerf, O. Kruger, P. Navez, R. F. Werner, and M. M. Wolf. Non-Gaussian Cloning of Quantum Coherent States is Optimal // *Phys. Rev. Lett.* – 2005. – Vol. 95. – P. 070501.
- [23] J. Appel, E. Figueroa, D. Korystov, M. Lobino, and A. I. Lvovsky // *Phys. Rev. Lett.* – 2008. – Vol. 100. – P. 093602.
- [24] A.N. Vetlugin, and I.V. Sokolov. Multivariate quantum memory as controllable delayed multiport beamsplitter. // arXiv: 1511.07787v1 [quant-ph]. 24 Nov 2015