Критерий перепутанности квантово-механических систем на основании квантовой информации Фишера

Михайлов А.С., группа 17Б-21.
Научный руководитель: С. Б. Королев

Санкт-Петербургский государственный университет

19 ноября 2020 г.

Введение

Во многих областях квантовой механики встречаются так называемые запутанные состояния.
Пусть составная система описывается матрицей плотности ρ, действующей в пространстве $H_1 \otimes H_2$. Состояние ρ называется сепарабельным, если верна следующая факторизация:

$$\rho = \sum_k p_k \rho_1^k \otimes \rho_2^k, \tag{1}$$

где $p_k \geq 0$, а ρ_1^k и ρ_2^k - матрицы плотности соответствующих подсистем.
В противном случае, когда матрица плотности не факторизуется, состояние называется несепарабельным или запутанным.

Мотивировка задачи

- Запутанные состояния встречаются в различных квантовомеханических задачах
- Вследствие различных физических ограничений приходиться работать с неидеально запутанными состояниями
- Хотим определить, как изменяется идеально запутанное состояние ρ_1 в результате некого воздействия, и понять, как хорошо полученное состояние ρ_2 запутано
- Для этого будем измерять расстояние между ρ_1 и ρ_2 в пространстве матриц плотности. Расстояние маленькое - ρ_2 запутано хорошо, и наоборот.

Реализация

Хотим измерить расстояние - необходимо ввести метрику. Будем рассматривать кривую $\hat{\rho}(X)$ в пространстве операторов плотности.

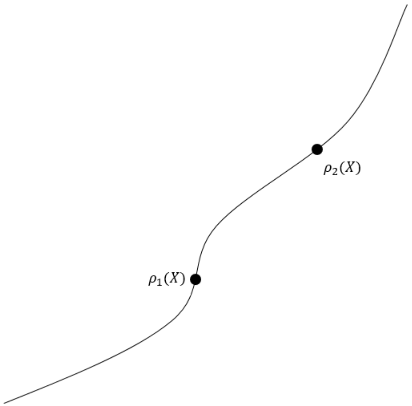

Рис.: Иллюстрация к рассматриваемой задаче

- Построить классическую метрику различимости
- Обобщить полученный результат на квантовый случай

Рассмотрим N измерений с результатами $\xi_1, \ldots, \xi_N$. Параметр X вычисляется с помощью функции $X_{est} = X_{est}(\xi_1, \ldots, \xi_N)$. Разумное определение статистического расстояния - измерять приращение параметра dX в единицах статистического отклонения оценочной функции от параметра. Подходящая мера отклонения имеет вид

$$\frac{X_{est}}{|d\langle X_{est}\rangle / dX|} - X = \delta X. \tag{2}$$

Тогда определим статистическое расстояние как

$$ds^2 = \frac{dX^2}{\min[N\langle(\delta X)^2\rangle]_X}. \tag{3}$$

Минимизация расстояния. Информация Фишера

Классическая оптимизация основана на нижней грани, называемой гранью Крамера-Рао.
Рассмотрим равенство

$$0 = \int d\xi_1 \ldots d\xi_N p(\xi_1|X) \ldots p(\xi_N|X) \Delta X_{est}, \tag{4}$$

где $\Delta X_{est} = X_{est}(\xi_1, \ldots, \xi_N) - \langle X_{est} \rangle_X$.
Дифференцируя по X и применяя к полученному выражению неравенство Шварца, получим

$$NF(X)\langle(\Delta X_{est})^2\rangle_x \geq \left(\frac{d\langle X_{est}\rangle_X}{dX}\right)^2, \tag{5}$$

Здесь $F(X)$ - *информация Фишера*, определяемая как

$$F(X) = \int d\xi p(\xi|X) \left(\frac{\partial \ln p(\xi|X)}{\partial X}\right)^2 = \int d\xi \frac{1}{p(\xi|X)} \left(\frac{\partial p(\xi|X)}{\partial X}\right)^2 \quad (6)$$

Записанная в терминах (3) грань Крамера-Рао выглядит как

$$N\langle(\delta X)^2\rangle_X \geq \frac{1}{F(X)} + N\langle\delta X\rangle_X^2 \geq \frac{1}{F(X)}. \quad (7)$$

Таким образом, для данного вероятностного распределения $p(\xi|X)$, мы получаем классическую метрику различимости

$$ds_{PD}^2 = F(X) dX^2 \quad (8)$$

Обобщенные измерения описываются наобором неотрицательно определённых эрмитовых операторов $\hat{E}(\xi)$, которые полны в следующем смысле

$$\int d\xi \hat{E}(\xi) = \hat{I}. \tag{9}$$

здесь ξ – результат измерения.

$$\rho(\xi|X) = \mathrm{tr}(\hat{E}(\xi)\hat{\rho}(X)) - \text{ плотность вероятности} \tag{10}$$

Оптимизация относительно квантовых измерений

Теперь второй шаг, оптимизация относительно квантовых измерений, заключается в максимизации информации Фишера по всем этим измерениям, то есть

$$ds^2_{DO} = dX^2 \max_{\hat{E}(\xi)} F(X), \tag{11}$$

где

$$F(X) = \int d\xi \frac{1}{p(\xi|X)} \left(\frac{\partial p(\xi|X)}{\partial X} \right)^2 \tag{12}$$

Видно, что информация Фишера содержит деление на $p(\xi|X)$, поэтому в квантовом случае необходимо корректно определить данную операцию.

Оптимизация относительно квантовых измерений

Для этого введём оператор

$$\mathcal{R}_{\hat{\rho}}(\hat{O}) = \frac{1}{2}(\hat{\rho}\hat{O} + \hat{O}\hat{\rho}) = \sum_{k,j} \frac{1}{2}(p_j + p_k) O_{jk} |j\rangle\langle k|. \tag{13}$$

Определим обратный оператор $\mathcal{R}_{\hat{\rho}}(\hat{O})^{-1}$ с матричными элементами вида

$$[\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{O})]_{jk} = \frac{2O_{jk}}{p_j + p_k}. \tag{14}$$

Оптимизация относительно квантовых измерений

Тогда информация Фишера будет записываться следующим образом

$$F(X) = \int d\xi \frac{[\mathrm{tr}(\hat{E}(\xi)\hat{\rho}'(X))]^2}{\mathrm{tr}(\hat{E}(\xi)\hat{\rho}(X))}, \tag{15}$$

где $\hat{\rho}' \equiv d\rho/dX$. Воспользуемся следующим свойством этого оператора

$$\mathrm{tr}(\hat{A}\hat{B}) = \mathrm{Re}[\mathrm{tr}(\hat{\rho}\hat{A}\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{B}))]. \tag{16}$$

Теперь преобразуем информацию Фишера (15) для получения верхней границы

$$F = \int d\xi \frac{\left(\mathrm{Re}\big[\mathrm{tr}(\hat{\rho}\hat{E}(\xi)\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}'))\big]\right)^2}{\mathrm{tr}(\hat{E}(\xi)\hat{\rho})} \le \int d\xi \frac{\left|\mathrm{tr}(\hat{\rho}\hat{E}(\xi)\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}'))\right|^2}{\mathrm{tr}(\hat{E}(\xi)\hat{\rho})} = \quad (17)$$

$$= \int d\xi \left|\mathrm{tr}\left(\frac{\hat{\rho}^{1/2}\hat{E}^{1/2}(\xi)}{\sqrt{\mathrm{tr}(\hat{E}(\xi)\hat{\rho})}}\hat{E}^{1/2}\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}')\hat{\rho}^{1/2}\right)\right|^2 \le \quad (18)$$

$$\le \int d\xi\, \mathrm{tr}(\hat{E}(\xi)\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}')\hat{\rho}\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}')) = \mathrm{tr}(\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}')\hat{\rho}\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}')) \quad (19)$$

Оптимизация относительно квантовых измерений

Необходимым и достаточным условием достижения равенства на шаге (17) является

$$\mathrm{Im}[\mathrm{tr}(\hat{\rho}\hat{E}(\xi)\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}'))] = 0 \qquad \forall\xi \tag{20}$$

И на шаге (18) при использовании неравенства Шварца

$$\hat{E}^{1/2}(\xi)\hat{\rho}^{1/2} = \lambda_\xi \hat{E}^{1/2}(\xi)\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}')\hat{\rho}^{1/2}, \tag{21}$$

где $\lambda_\xi = \mathrm{tr}(\hat{E}(\xi)\hat{\rho})/\mathrm{tr}(\hat{\rho}\hat{E}(\xi)\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}'))$ — константа, зависящая только от ξ, так как равенство выполняется в случае, когда эти операторы пропорциональны друг другу.

Конечный вид метрики

Таким образом, верхняя грань (19) достигается, а метрика различимости на пространстве операторов плотности принимает вид

$$ds^2_{DO} = \mathrm{tr}(\mathcal{R}^{-1}_{\hat{\rho}}(d\hat{\rho})\hat{\rho}\mathcal{R}^{-1}_{\hat{\rho}}(d\hat{\rho})) = \mathrm{tr}(d\hat{\rho}\mathcal{R}^{-1}_{\hat{\rho}}(d\hat{\rho})). \tag{22}$$

Введение метрики на пространстве матриц плотности позволяет сформулировать критерий перепутанности квантовых систем на основе информации Фишера.

Свойства квантовой информации Фишера

В N-частичном гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \bigotimes \cdots \bigotimes \mathcal{H}_N$ любое сепарабельное состояние $\hat{\rho}_{sep} = \sum_\gamma p_\gamma \hat{\rho}_1^{(\gamma)} \bigotimes \cdots \bigotimes \hat{\rho}_N^{(\gamma)}$ удовлетворяет неравенсту

$$F_Q[\hat{\rho}_{sep}, \hat{A}] \leq 4\mathrm{Var}(\hat{A})_{\Pi(\hat{\rho}_{sep})}, \tag{23}$$

где $\hat{A} = \sum_i \hat{A}_i$ - сумма произвольных локальных операторов, действующих на подпространство $\mathcal{H}_i$, $\mathrm{Var}\,\hat{A}_{\hat{\rho}} = \langle \hat{A}^2 \rangle_{\hat{\rho}} - \langle \hat{A} \rangle_{\hat{\rho}}^2$ – дисперсия наблюдаемой A, $\Pi(\hat{\rho}) = \hat{\rho}_1 \bigotimes \cdots \bigotimes \hat{\rho}_N$ - состояние, являющееся прямым произведением редуцированных матриц плотности $\hat{\rho}_i$.

Свойства квантовой информации Фишера

Как было показано ранее, квантовая информация Фишера имеет верхнюю грань

$$F_Q[\hat{\rho}, \hat{A}] \geq \frac{|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle_{\hat{\rho}}|^2}{\mathrm{Var}(\hat{B})}, \tag{24}$$

которая соблюдается для произвольного состояния ρ и произвольной пары операторов $\hat{A}, \hat{B}$.

Примечание: см. Pezze, L., Smerzi, A. (2009). Entanglement, Nonlinear Dynamics, and the Heisenberg Limit. Physical Review Letters, 102(10). doi:10.1103/physrevlett.102.100401

Критерий перепутанности

Комбинируя неравенства (23) и (24), получим основанный на дисперсии критерий сепарабельности

$$\mathrm{Var}(\hat{A})_{\Pi(\hat{\rho}_{sep})}\mathrm{Var}(\hat{B}) \geq \frac{|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle_{\rho_{\hat{sep}}}|^2}{4}, \tag{25}$$

где $\hat{B}$ - произвольный оператор, а $\hat{A} = \sum_i \hat{A}_i$.
Можно сформулировать критерий сепарабельности, введя так называмые обобщенные сжимающие коэффициенты

$$\xi^2_{\hat{A},\hat{B}}(\hat{\rho}) = \frac{4\mathrm{Var}(\hat{A})_{\Pi(\hat{\rho}_{sep})}\mathrm{Var}(\hat{B})}{|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle_{\hat{\rho}}|^2}. \tag{26}$$

Видно, что для сепарабельных состояний $\xi^2_{\hat{A},\hat{B}}(\hat{\rho}_{sep}) \geq 1$

Пример использования критерия

Покажем, как можно использовать критерий (25) на примере системы с непрерывными переменными.
Построим критерий запутанности на основе операторов локальных координат $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_N$ и импульсов $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_N$.
Рассмотрим оператор

$$\hat{M}(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{N} (n_i \hat{x}_i + m_i \hat{p}_i). \tag{27}$$

Матрица ковариаций

Критерий (25) можно сформулировать на языке ковариаций. Введём в рассмотрение вектор размерности $2N$

$$\hat{r} = (\hat{r}_1, \ldots, \hat{r}_{2N}) = (\hat{x}_1, \hat{p}_1, \ldots, \hat{x}_N, \hat{p}_N). \tag{28}$$

Определим с его помощью поэлементно матрицу ковариаций состояния $\hat{\rho}$

$$(\gamma_{\hat{\rho}})_{\alpha\beta} = \mathrm{Cov}(\hat{r}_\alpha, \hat{r}_\beta)_{\hat{\rho}}. \tag{29}$$

Матрица ковариаций

Произвольные локальные операторы

$$\hat{M}(g) = \sum_{i=1}^{2N} g_i \hat{r}_i, \tag{30}$$

с вещественным вектором $g = (g_1, \ldots, g_{2N})$ будут удовлетворять следующим коммутационным соотношениям

$$[\hat{M}(g), \hat{M}(h)] = \sum_{i,j=1}^{2N} h_i g_j [\hat{r}_i, \hat{r}_j] = i\mathbf{h}^T \Omega \mathbf{g}, \tag{31}$$

где $\Omega = \oplus_{i=1}^{N} \omega$, с $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Критерий в терминах ковариационной матрицы

Дисперсия такого оператора, выраженная в терминах матрицы ковариаций:

$$\mathrm{Var}(\hat{M}(g))_{\hat{\rho}} = \sum_{i,j=1}^{2N} g_i g_j \mathrm{Cov}(\hat{r}_i, \hat{r}_j)_{\hat{\rho}} = \mathbf{g}^T \gamma_{\hat{\rho}} \mathbf{g}. \tag{32}$$

Теперь мы можем переписать критерий сепарабельности (25) в новых терминах

$$(\mathbf{h}^T \gamma_{\Pi(\hat{\rho}_{sep})} \mathbf{h})(\mathbf{g}^T \gamma_{\hat{\rho}_{sep}} \mathbf{g}) \geq \frac{(\mathbf{h}^T \Omega \mathbf{g})^2}{4}, \tag{33}$$

где $\gamma_{\Pi(\hat{\rho}_{sep})}$ – матрица ковариаций, получаемая из $\gamma_{\hat{\rho}_{sep}}$ путем зануления всех элементов за исключением 2x2 блоков на диагонали.

Коэффициент сжатия

Выражение (34) можно упростить, используя только пары векторов, максимизирующих правую часть.

$$(\mathbf{h}^T \gamma_{\Pi(\hat{\rho}_{sep})} \mathbf{h})(\mathbf{g}^T \gamma_{\hat{\rho}_{sep}} \mathbf{g}) \geq \frac{(\mathbf{h}^T \Omega \mathbf{g})^2}{4}, \qquad (34)$$

Тогда необходимое условие сепарабельности запишется как

$$\xi^2(\hat{\rho}_{sep}) := \min_g \xi_g^2(\hat{\rho_{sep}}) \geq 1, \qquad (35)$$

где согласно определению (26), вводится *бозонный многомодовый коэффициент сжатия*

$$\xi^2(\hat{\rho}) := \frac{4(\mathbf{g}^T \Omega^T \gamma_{\Pi(\hat{\rho})} \Omega \mathbf{g})(\mathbf{g}^T \gamma_{\hat{\rho}} \mathbf{g})}{(\mathbf{g}^T \mathbf{g})^2} \qquad (36)$$

Применение критерия

Рассмотрим, как применить критерий запутанности к двухмодовому сжатому состоянию.
Рассмотрим двухмодовое вакуумное состояние

$$|\Psi_r^{(2)}\rangle = \hat{S}_{12}[r]|0,0\rangle, \tag{37}$$

сгенерированное оператором $\hat{S}_{12}[\xi] = e^{\xi\,\hat{a}_1^+\,\hat{a}_2^+ - \xi^*\,\hat{a}_1\,\hat{a}_2}$, $|0\rangle$ - вакуумное состояние.

Применение критерия

Покажем, что для таких состояний нарушается выражение (35), что говорит о их несепарабельности.
Для этого запишем матрицу коварияций для таких состояний

$$\gamma_{|\Psi_r^{(2)}\rangle} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} R^{(2)} & 0 & S^{(2)} & 0 \\ 0 & R^{(2)} & 0 & -S^{(2)} \\ S^{(2)} & 0 & R^{(2)} & 0 \\ 0 & -S^{(2)} & 0 & R^{(2)} \end{pmatrix}, \qquad (38)$$

где $R^{(2)}$ =cosh(2r), $S^{(2)}$ =sinh(2r).
Выберем $g_{xp} = (c_x, c_p, -c_x, c_p)$ с произвольными c_x и c_p, который является собственным вектором матрицы (38) с минимальным собственным значением $(R^{(2)} - S^{(2)})/2$.

Применение критерия

Матрица ковариаций, исключающая корреляциии, получается из исходной занулением всех элементов, за исключением блоков 2x2 на диагонали:

$$\gamma_{\Pi(|\Psi_r^{(2)}\rangle)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} R^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Таким образом, $\mathbf{g}_{xp}^T \Omega^T \gamma_{\Pi(|\Psi_r^{(2)}\rangle)} \Omega \mathbf{g}_{xp} = (c_x^2 + c_p^2) R^{(2)}$ и с учетом $\mathbf{g}_{xp}^T \mathbf{g}_{xp} = 2(c_x^2 + c_p^2)$, окончательно получаем

$$\xi^2(|\Psi_r^{(2)}\rangle) = \frac{1}{2}(1 + e^{-4r}) \geq 1, \tag{40}$$

что нарушается для всех $r > 0$.