

Санкт-Петербургский государственный университет

РЕШЕТНИКОВ Даниил Дмитриевич

Выпускная квалификационная работа

***Возможность использования радиального числа Лагер-Гауссовых мод в задачах
квантовой информатики***

Уровень образования: бакалавриат

Направление: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»

Основная образовательная программа: СВ.5009.2017 «Прикладные физика и математика»

Профиль: «Квантовая оптика и информатика»

Научный руководитель:

Доцент кафедры «Общая физика I»

к.ф.-м.н Лосев Александр Сергеевич

Рецензент:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт электрофизики и электроэнергетики

Российской академии наук

Трифанов Александр Игоревич

Санкт-Петербург
2021

Оглавление

1	Введение	3
2	Лагер-Гауссовы моды	4
3	Вектор Умова-Пойнтинга Лагер-Гауссова пучка	6
4	Оператор радиального числа Лагер-Гауссовой функции	10
5	Анализ оператора $\hat{P}_z$	11
6	Эрмитовость оператора радиального числа.	14
7	Вектор Римана-Зильберштейна. Точное решение системы уравнений Максвелла. Волновая функция в импульсном пространстве.	16
8	Оператор радиального числа в импульсном представлении	19
9	Разложение вектора электрической индукции поля $\mathbf{E}$ по полному ортогональному набору	20
10	Система уравнений Гайзенберга в модели рамановской квантовой памяти для Лагер-Гауссовых мод	23
11	Вывод	26

1 Введение

Использование света как средства для передачи информации имеет свои преимущества: высокая скорость распространения, наличие источников, покрывающих весь оптический диапазон электромагнитных волн, и невзаимодействие разных мод при их пересечении и совместном распространении. В то же время последний пункт играет негативную роль, когда речь заходит об обработке информации: напрямую использовать один световой пучок для преобразования другого невозможно. Но, как известно, проблема решается посредством взаимодействия излучения и вещества. Так, например, если речь идет об управлении квантовыми состояниями света, то одним из вариантов может служить квантовая память – как способ не только сохранить, но и контролируемо изменить записанное в ячейку памяти квантовое состояние [1].

Изменение квантового состояния света подразумевает изменение информации, закодированной в данном состоянии. В свою очередь кодирование информации может проводиться как с помощью дискретных, так и непрерывных переменных. Наиболее распространенный путь для дискретных переменных – это использование поляризационных состояний света. Однако он дает ограничение на размерность гильбертова пространства состояний, равную двум. То есть однофотонные импульсы в этом случае представляют собой кубиты. Переход к алгебре векторов состояний, принадлежащих пространству более высокой размерности, позволяет расширить арсенал протоколов квантовых вычислений [2]. В этой связи становится понятным наличие широкого спектра работ теоретического и экспериментального характера, связанных с пучками Лагер-Гауссовых мод [3] [4]. У таких мод основной дискретной величиной, определяющей состояние поля, является азимутальное число («индекс», «заряд») l Лагер-Гауссовой функции. Набор Лагер-Гауссовых мод, различающихся между собой по азимутальному числу, является бесконечным, но при этом полным и ортонормированным. Таким образом, возможен переход от кубитов к кудитам. На сегодняшний день предложено несколько способов генерировать пучки с различным значением l [5]. Однако в силу того, что азимутальное число является собственным значением оператора орбитального углового момента $-i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$, идентификация значения l при детектировании пучка остается вполне успешно разрешимой задачей только для ограниченного набора азимутальных чисел.

На этом фоне второе число, характеризующее Лагер-Гауссову функцию – радиальное число p , кажется несколько не востребованным. Что вполне объяснимо, так как его физический смысл не имеет такого же простого понимания, как l [6].

Диплом построен следующим образом. Во 2-м параграфе дано краткое описание Лагер-Гауссовых мод. В 3, 4, 5 и 6 параграфах мы, опираясь на исследования [6] [7] показываем, что при определенной конфигурации пучка, эксперимент по детектированию квантовых состояний, различающихся по радиальному числу, может оказаться более эффективным даже для больших значений p нежели детектирование состояний на основе азимутального числа. В заключительных параграфах 9 и 10 приводится пример использования Лагер-Гауссовых мод в рамановской модели квантовой памяти.

2 Лагер-Гауссовы моды

Лагер-Гауссова функция является решением волнового уравнения для вектора электрической напряженности $\mathbf{E}$ в параксиальном приближении — когда основой нашего рассмотрения становится оптический пучок. В параксиальном приближении изменение интенсивности поля в поперечной плоскости (x, y) при его распространении вдоль оси z очень мало по сравнению с продольной, то есть $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \ll k \frac{\partial u}{\partial z} \ll ku$.

$$\nabla_t^2 E - 2ik \frac{\partial}{\partial z} E = 0, \quad (1)$$

где k — волновое число.

Запишем уравнение, описывающее распределение Лагер-Гауссова пучка в пространстве в фиксированный момент времени:

$$LG_{pl}(r, \phi, z) = \sqrt{\frac{2p!}{\pi (p + |l|)!} \frac{1}{\omega_z}} \left(\frac{\sqrt{2}r}{\omega_z} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left(\frac{2r^2}{\omega_z^2} \right) \cdot \exp \left(-\frac{r^2}{\omega_z^2} + i \left(l\phi + \frac{kr^2}{2R_z} - (2p + |l| + 1) \varphi_g \right) \right). \quad (2)$$

Здесь r, ϕ, z — координаты цилиндрической системы координат; l и p — азимутальный и радиальный индексы, которые определяют ортогональный профиль пучка.

$$\omega_z = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{4z^2}{k^2 \omega_0^4}} - \text{радиус перетяжки пучка}; \quad (3)$$

$$R_z = z + \frac{k^2 \omega_0^4}{4z} - \text{радиус кривизны пучка в месте перетяжки}; \quad (4)$$

$$\varphi_g = \arctg \left(\frac{2z}{k\omega_0^2} \right) - \text{фаза Гуй}; \quad (5)$$

$$L_p^{|l|}(x) = \frac{e^x x^{-|l|}}{p!} \frac{d^p}{dx^p} (e^{-x} x^{p+|l|}) - \text{обобщенные полиномы Лагера порядка } p \text{ степени } |l|, \quad (6)$$

представленные по формуле Родрига.

Целое число l и целое неотрицательное p отвечают за вид поперечного пространственного профиля пучка (Рис. 1), который представляет собой $p + 1$ концентрических светлых колец. l задает число скачков фазы от 0 до 2π при обходе на 2π вокруг оси распространения. Число l обладает вполне определенным физическим смыслом — это величина орбитального углового момента каждого фотона в Лагер-Гауссовой моде, если положить $\hbar = 1$. Радиальный индекс p в свою очередь не обладает такой наглядной аналогией.

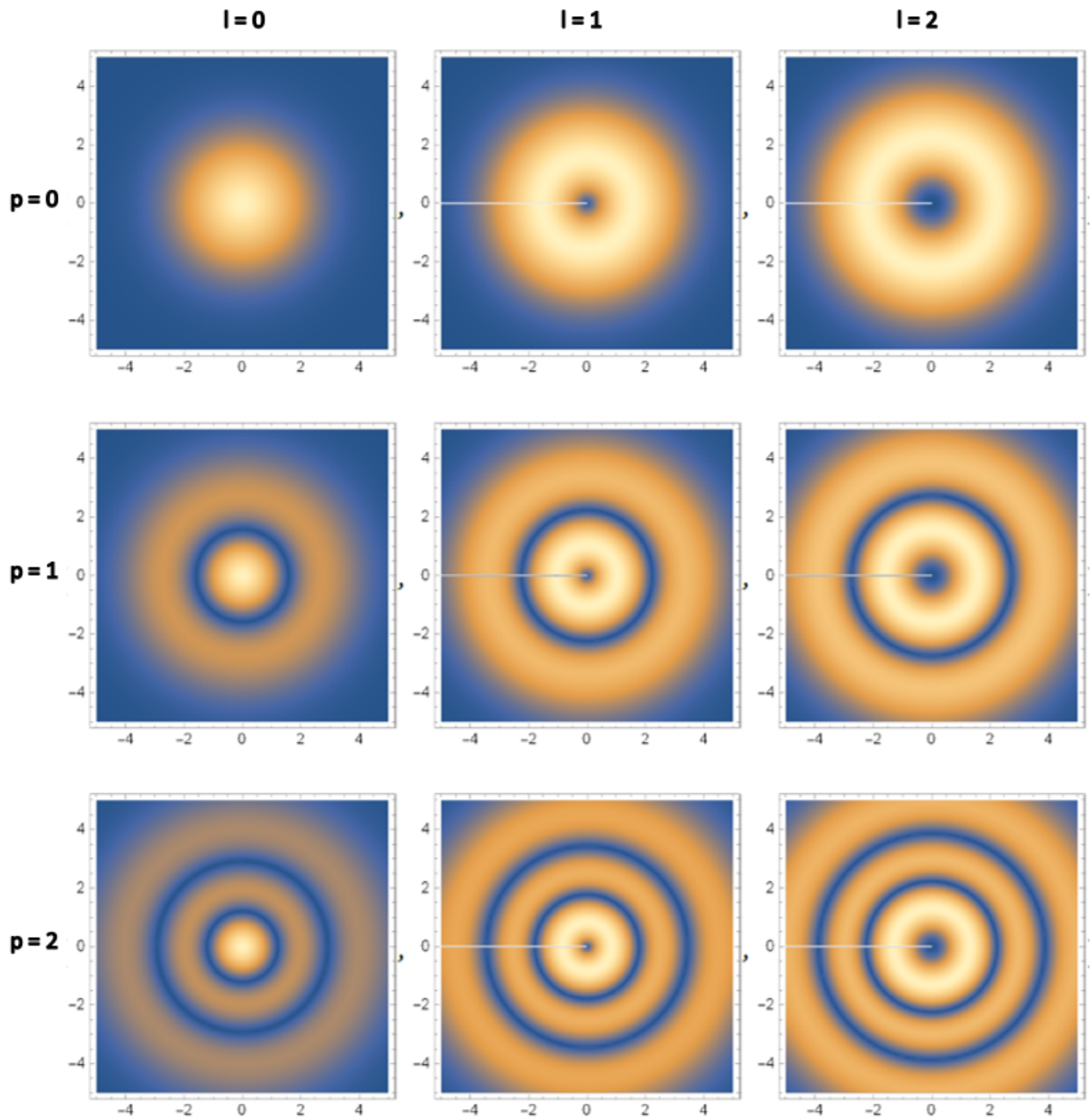


Рис. 1: Пространственное распределение интенсивности Лагер-Гауссовых пучков в области перетяжки $z = 0$.

3 Вектор Умова-Пойнтинга Лагер-Гауссова пучка

Негативным моментом для работы с квантовыми состояниями Лагер-Гауссовых мод, различающимися по радиальному числу p , является увеличение радиуса светлых колец, а также их уширение и сужение при распространении пучка по z от перетяжки (Рис. 2). Необходимо наложить некоторые требования на конфигурацию пучка, с учетом которых можно увеличивать радиальное число так, чтобы их можно было однозначно детектировать. Найдем вектор Умова-Пойнтинга для Лагер-Гауссова пучка [8].

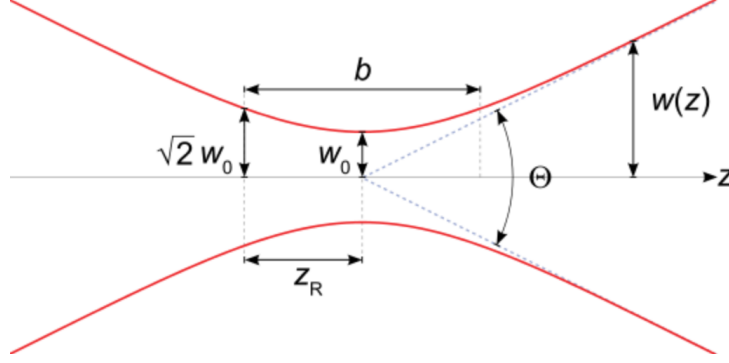


Рис. 2: Ширина Гауссова пучка $w_z(z)$ как функция z , радиус перетяжки пучка w_0 , глубина резкости b , длина Рэлея z_R , угловая расходимость пучка θ

Напряженности электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей можно выразить через комплексный векторный потенциал $\mathbf{A}$ при помощи соотношений

$$\mu_0 \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (7)$$

$$\mathbf{E} = -i\omega \mathbf{A} - \nabla \Phi, \quad (8)$$

где $\Phi = \frac{i}{\omega} \nabla \cdot \mathbf{A}$ — комплексный скалярный потенциал. Здесь и далее будем использовать калибровку Лоренца для однозначного определения векторного потенциала:

$$\nabla \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = 0. \quad (9)$$

Предположим, что вектор $\mathbf{A}$ направлен вдоль оси $\hat{\mathbf{x}}$:

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}} u(x, y, z) e^{-ikz}, \quad (10)$$

где $u(x, y, z)$ — решение скалярного параксиального волнового уравнения

$$i \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{2k} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u. \quad (11)$$

Поэтому, пренебрегая производной $\frac{\partial u}{\partial z}$ по сравнению с ku и производными второго порядка и выше, можно записать следующие выражения для напряженности электрического и индукции магнитного полей:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \nabla \times (\hat{\mathbf{x}} u(x, y, z) e^{-ikz}) = -ik \left(\hat{\mathbf{y}} u(x, y, z) - i \frac{\hat{\mathbf{z}}}{k} \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} \right) e^{-ikz}, \quad (12)$$

$$\mathbf{E} = -i\omega \left(\hat{\mathbf{x}} u(x, y, z) - i \frac{\hat{\mathbf{z}}}{k} \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} \right) e^{-ikz}. \quad (13)$$

Используем найденные поля для нахождения реальной части усредненного по времени вектора Пойнтинга $\mathbf{S}$ [9]:

$$\mathbf{S} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{2} ((\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}) + (\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*)). \quad (14)$$

Не станем пренебрегать малостью слагаемого $\frac{\partial u}{\partial z}$ и получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} ((\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}) + (\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*)) = \frac{1}{2} & \left(\left(\frac{\omega}{k} \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} - i\omega u \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(i\omega u^* \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(i\omega u^* \frac{\partial u}{\partial z} + \omega k u^* u \right) \hat{\mathbf{z}} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\omega}{k} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial z} + i\omega u^* \frac{\partial u}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(-i\omega u \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(-i\omega u \frac{\partial u^*}{\partial z} + \omega k u u^* \right) \hat{\mathbf{z}} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Группируя слагаемые и пренебрегая производными второй степени, получаем

$$\mathbf{S} = \frac{i\omega}{2} (u^* \nabla u - u \nabla u^*) + \omega k |u|^2 \hat{\mathbf{z}}. \quad (16)$$

Важно отметить, что полученный результат также применим и к функциям $u(r, \phi, z)$ вида

$$u(r, \phi, z) = u_o(r, z) e^{-i\phi}. \quad (17)$$

В таком случае, компоненты вектора Пойнтинга будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} S_r &= \frac{i\omega}{2} \left(u_o^* \left(u_o + r \frac{\partial u_o}{\partial r} \right) - u_o \left(u_o^* + r \frac{\partial u_o^*}{\partial r} \right) \right), \\ S_\phi &= \frac{\omega l}{r} |u|^2, \\ S_z &= \omega k |u|^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Аналогичные рассуждения можно применить и к вектору $\mathbf{A}$, который имеет произвольную поляризацию в плоскости, ортогональной направлению распространения пучка:

$$\mathbf{A} = (\alpha \hat{\mathbf{x}} + \beta \hat{\mathbf{y}}) u(x, y, z) e^{ikz}. \quad (19)$$

В таком случае напряженность электрического поля и индукция магнитного равны

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= i\omega \mathbf{A} + \nabla \left(\frac{1}{i\omega} \nabla \cdot \mathbf{A} \right) = \left(i\omega \alpha u \hat{\mathbf{x}} + i\omega \beta u \hat{\mathbf{y}} - \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) e^{ikz}, \\ \mathbf{B} &= \left(-\beta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + iku \right) \hat{\mathbf{x}} + \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial z} + iku \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\beta \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \right) e^{ikz}. \end{aligned} \quad (20)$$

Вычислим вектор Пойнтинга $\mathbf{S}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) &= \frac{1}{2} ((\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}) + (\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*)) = \frac{1}{2} \left(i\omega (u \nabla u^* - u^* \nabla u) + 2\omega k |u|^2 \hat{\mathbf{z}} + \right. \\ & \left. + i\omega (\alpha \beta^* - \alpha^* \beta) \left(\frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{y}} \right) |u|^2 \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Вновь перейдем к цилиндрической системе координат и пучкам вида (17). Заметим, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{y}} \right) |u|^2 \equiv \nabla |u|^2 \times \hat{\mathbf{z}}, \quad (22)$$

и так как $|u|^2$ не зависит от ϕ

$$\nabla|u|^2 \times \hat{\mathbf{z}} = -\hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial|u|^2}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} = -\frac{\partial|u|^2}{\partial r} \hat{\phi}. \quad (23)$$

Выделим и переобозначим множитель, отвечающий за поляризацию пучка:

$$\sigma \equiv i(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta). \quad (24)$$

Тогда получаем следующее выражение для вектора Пойнтинга в цилиндрических координатах:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \left(i\omega \left(u_0^* \left(u_0 + r \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) - u_0 \left(u_0^* + r \frac{\partial u_0^*}{\partial r} \right) \right) \hat{\mathbf{r}} + 2\omega k |u|^2 \hat{\mathbf{z}} + \left(2\frac{\omega l}{r} |u|^2 - \omega \sigma \frac{\partial|u|^2}{\partial r} \right) \hat{\phi} \right) \quad (25)$$

Наконец, вычислим вектор Умова-Пойнтинга для Лагер-Гауссова пучка. Найдем выражения для компонент вектора в случае как линейной, так и эллиптической поляризации. Для вычисления компонент в явном виде, подставим Лагер-Гауссову моду (2) в выражение для компонент вектора Пойнтинга в случае линейной поляризации (18) и в случае эллиптической (25) и вынесем общий множитель после преобразований:

$$\begin{aligned} S_r^{lin} &= \frac{\omega k r z}{z_R^2 + z^2} |LG_{pl}|^2, \\ S_\phi^{lin} &= \frac{\omega l}{r} |LG_{pl}|^2, \\ S_z^{lin} &= \omega k |LG_{pl}|^2. \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} S_r^{circ} &= \frac{\omega k r z}{z_R^2 + z^2} |LG_{pl}|^2, \\ S_\phi^{circ} &= \left(\frac{\omega l}{r} - \frac{1}{2} \omega \sigma \frac{\partial}{\partial r} \right) |LG_{pl}|^2, \\ S_z^{circ} &= \omega k |LG_{pl}|^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Для того, чтобы более подробно проанализировать их поведение, необходимо построить график модуля вектора Пойнтинга $|\vec{S}(r, z)|$, как функции двух координат r и z :

$$|\vec{S}(r, z)| = \sqrt{S_r^2(r, z) + S_\phi^2(r, z) + S_z^2(r, z)}. \quad (28)$$

В таком случае зависимость от ϕ уходит, так как вектор Пойнтинга прямо пропорционален квадрату модуля Лагер-Гауссовой функции, а ϕ туда входит только как чисто мнимый аргумент экспоненты. График построен в предположении линейной поляризации векторного потенциала.

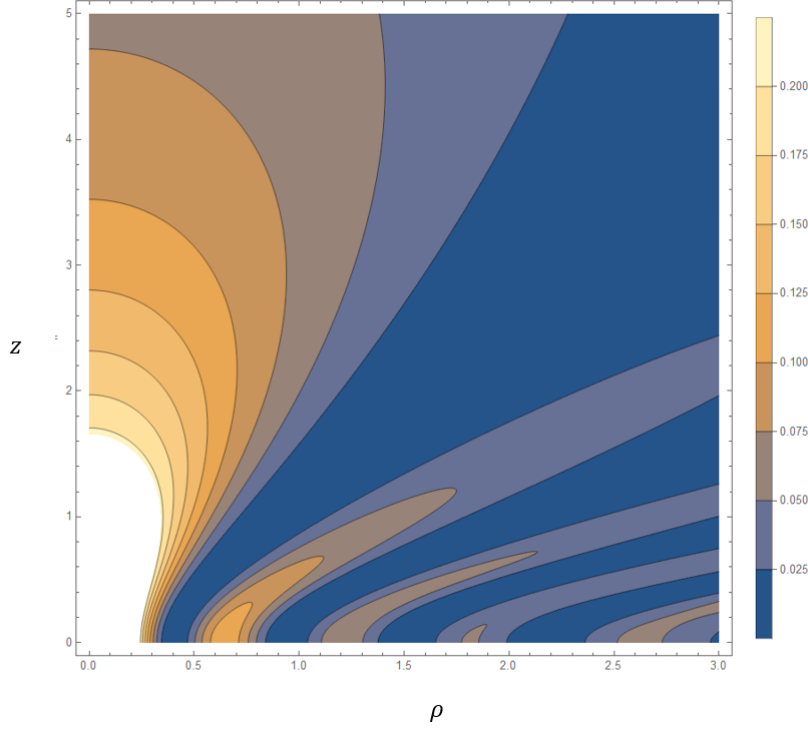


Рис. 3: Модуль вектора Пойнтинга как функция координат r и z .

Хорошо видно, что с увеличением z срезы колец интенсивности (модуля вектора Пойнтинга) для произвольного ϕ начинают сдвигаться по радиусу r в сторону периферии, испытывая уширения и сужения. То есть происходит постепенное перераспределение энергии к крайним кольцам. Проведенный численный анализ показал, что расплывание пучка в поперечной плоскости начинает резко возрастать с ростом радиального числа p . Таким образом, использование радиальных чисел для задания квантового состояния становится целесообразным только в том случае, когда уширение пучка будет крайне мало при увеличении z .

Данное требование может быть выполнено при следующей конфигурации пучка:

$$z_{max} \ll \omega_0^2, \quad z_{max} \ll z_R \ll R_z, \quad (29)$$

где z_{max} – максимальное по модулю значение $|z|$, при котором при выполнении условий (29) пучок можно считать не уширенным.

4 Оператор радиального числа Лагер-Гауссовой функции

Для ответа на вопрос о физическом смысле радиального индекса необходимо получить спектральное уравнение для оператора, собственными функциями которого являются Лагер-Гауссовы моды, а набором собственных чисел — соответствующие значения радиального индекса Лагер-Гауссовых мод. Получим такое уравнение для обобщенных полиномов Лагера некоторой переменной x [6].

Воспользуемся следующими соотношениями для обобщенных полиномов Лагера:

$$\begin{aligned} pL_p^l(x) &= (l+1-x)L_{p-1}^{l+1}(x) - xL_{p-2}^{l+2}(x), \\ \frac{\partial}{\partial x}L_p^l(x) &= -L_{p-1}^{l+1}(x), \end{aligned} \quad (30)$$

откуда

$$\left[(x-l-1)\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] L_p^l(x) = pL_p^l(x). \quad (31)$$

Выражение (31) является уравнением на собственные числа для оператора

$$\hat{\mathbb{P}}_L \equiv \left[(x-l-1)\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right]. \quad (32)$$

Найдем явный вид оператора $\hat{\mathbb{P}}$, собственными функциями которого будут являться Лагер-Гауссовы функции LG_{pl} . Посмотрим, как действует оператор $\hat{\mathbb{P}}_L$ в выражении (31) на члены слева от функции Лагера выражения (2).

Вначале сделаем все преобразования в точке $z = 0$.

Введем новые переменные:

$$x = \frac{2r^2}{\omega_0^2}, \quad (33)$$

$$NPT(x, \phi) = B_p^l x^{|l|/2} \cdot \exp\left(-\frac{x}{2} + il\phi\right), \quad (34)$$

$$B_p^l = \sqrt{\frac{2p!}{\pi(p+|l|)!}} \frac{1}{\omega_0}. \quad (35)$$

Тогда выражение (2) выглядит следующим образом:

$$LG_{pl}(x, \phi) = NPT(x, \phi) \cdot L_p^{|l|}(x). \quad (36)$$

Подробный вывод оператора $\hat{P}_0$ представлен в Приложении А. Он имеет вид:

$$\hat{\mathbb{P}}_{z=0} = -\frac{\omega_0^2}{8} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{\omega_0^2} - 1 \right) \quad (37)$$

Таким образом, мы получили следующее уравнение на собственные числа

$$\hat{\mathbb{P}}_{z=0} LG_{pl}(r, \phi, 0) = p LG_{pl}(r, \phi, 0). \quad (38)$$

Теперь найдем явный вид оператора $\hat{\mathbb{P}}_z$ при произвольном значении z . Подробный вывод представлен в Приложении Б. Искомый оператор, собственными функциями которого являются Лагер-Гауссовы функции, имеет вид:

$$\hat{\mathbb{P}}_z = -\frac{\omega_z^2}{8} \nabla_t^2 + \frac{iz}{k\omega_0^2} \frac{\partial}{\partial r} r - \frac{\hat{L}_z}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{\omega_0^2} - 1 \right). \quad (39)$$

5 Анализ оператора $\hat{\mathbb{P}}_z$.

Для понимая того, как интерпретировать радиальное число p необходимо выяснить, каким образом действует каждое слагаемое оператора (39) на Лагер-Гауссову функцию. В особенности интересно действие второго слагаемого, так как именно оно описывает динамику поперечного профиля пучка при его распространении вдоль оси z .

Запишем еще раз Лагер-Гауссову функцию и введем ряд обозначений:

$$LG_{pl}(r, \phi, z) = \sqrt{\frac{2p!}{\pi(p+|l|)!} \frac{1}{\omega_z}} \left(\frac{\sqrt{2}r}{\omega_z} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left(\frac{2r^2}{\omega_z^2} \right) \cdot \exp \left(-\frac{r^2}{\omega_z^2} + i \left(l\phi + \frac{kr^2}{2R_z} - (2p+|l|+1)\varphi_g \right) \right); \quad (40)$$

$$B_{p,l} \equiv \sqrt{\frac{2p!}{\pi(p+|l|)!}}; \quad (41)$$

$$F(z) \equiv \frac{1}{\omega_z} \cdot \exp(-i(2p+|l|+1)\varphi_g); \quad (42)$$

$$NPT(r, \phi, z) \equiv \exp \left(\frac{r^2}{\omega_z^2} + i \frac{kr^2}{2R_z} \right) \cdot \exp(il\phi). \quad (43)$$

Посмотрим, как действует первое слагаемое в операторе $\hat{\mathbb{P}}_z$ на Лагер-Гауссову функцию. В цилиндрических координатах оно имеет вид

$$-\frac{\omega_z^2}{8} \nabla_t^2 = -\frac{\omega_z^2}{8} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right). \quad (44)$$

Поддействуем отдельно каждым дифференциальным оператором на $LG_{p,l}$:

1.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} LG_{p,l} = -\frac{1}{r^2} LG_{p,l}. \quad (45)$$

2.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} LG_{p,l} = B_{p,l} \cdot F(z) \cdot \left(\frac{1}{r} NPT(r, \phi, z) \cdot \frac{\partial L_p^{|l|}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot L_p^{|l|} \cdot \frac{\partial NPT(r, \phi, z)}{\partial r} \right). \quad (46)$$

Вначале вычислим частную производную от функции $NPT(r, \phi, z)$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} NPT &= \frac{1}{r} \exp(il\phi) \frac{\partial}{\partial r} \exp \left(r^2 \left(\frac{ik}{2R_z} - \frac{1}{\omega_z} \right) \right) = \exp(il\phi) \cdot 2 \left(\frac{ik}{2R_z} - \frac{1}{\omega_z} \right) \cdot \\ &\cdot \exp \left(r^2 \left(\frac{ik}{2R_z} - \frac{1}{\omega_z} \right) \right). \end{aligned} \quad (47)$$

Для дальнейших преобразований воспользуемся некоторыми свойствами Лагер-Гауссовых функций.

(a)

$$L_p^{|l|}(x) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p+|l|}{p-k} \frac{x^k}{k!} \quad (48)$$

(b)

$$\frac{d^k}{dx^k} L_p^{|l|} = \begin{cases} (-1)^k L_{p-k}^{|l|+k}(x), & \text{если } k < p \\ 0, & \text{если } k > p \end{cases} \quad (49)$$

Таким образом, из (48) и (46) имеем

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} L_p^{[l]} \left(\frac{2r^2}{\omega_z^2} \right) = \frac{1}{r^2} \cdot p(p+1) \cdot L_p^{[l]}, \quad (50)$$

а из (49) и (46)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} L_p^{[l]} \left(\frac{2r^2}{\omega_z^2} \right) = \frac{4}{\omega_z^2} \frac{\partial}{\partial \left(\frac{2r^2}{\omega_z^2} \right)} L_p^{[l]} \left(\frac{2r^2}{\omega_z^2} \right) = -\frac{4}{\omega_z^2} \cdot L_{p-1}^{[l+1]} \left(\frac{2r^2}{\omega_z^2} \right). \quad (51)$$

В итоге из (46) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} LG_{p,l} &= \left(\frac{p(p+1)}{r^2} + 2 \left(\frac{ik}{2R_z} - \frac{1}{\omega_z^2} \right) \right) LG_{p,l} = \\ &= 2 \left(-\frac{ik}{2R_z} + \frac{1}{\omega_z^2} \right) LG_{p,l} - \frac{4\sqrt{p}}{\omega_z^2} LG_{p-1,l+1} \cdot \exp(-i\phi) \end{aligned} \quad (52)$$

3.

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} LG_{p,l} = B_{p,l} \cdot F(z) \cdot \left(NPT(r, \phi, z) \cdot \frac{\partial^2 L_p^{[l]} \left(\frac{2r^2}{\omega_z^2} \right)}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial NPT}{\partial r} \frac{\partial L_p^{[l]} \left(\frac{2r^2}{\omega_z^2} \right)}{\partial r} + L_p^{[l]} \left(\frac{2r^2}{\omega_z^2} \right) \frac{\partial^2 NPT}{\partial r^2} \right). \quad (53)$$

Вычислим вторую производную от функции NPT используя готовое выражение (47).

$$\frac{\partial^2 NPT}{\partial r^2} = \left(2 \left(\frac{ik}{2R_z} - \frac{1}{\omega_z^2} \right) + 4r^2 \left(\frac{ik}{2R_z} - \frac{1}{\omega_z^2} \right)^2 \right) \cdot \exp \left(r^2 \left(\frac{ik}{2R_z} - \frac{1}{\omega_z^2} \right) \right) \quad (54)$$

При помощи соотношений (48) и (49) получаем остальные слагаемые.

После проделанных вычислений находим, что

$$\begin{aligned} -\frac{\omega_z^2}{8} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) LG_{p,l} &= -\frac{\omega_z^2}{8} \left(-\frac{l^2}{r^2} + \frac{p(p+1)}{r^2} + \frac{p^2-1}{3r^4} \omega_z^2 + \left(\frac{ik}{2R_z} - \frac{1}{\omega_z^2} \right) \cdot \right. \\ &\cdot \left(4 + 4p(p+1) + 4r^2 \left(\frac{ik}{2R_z} - \frac{1}{\omega_z^2} \right) \right) \left. \right) LG_{p,l} = \frac{\omega_z^2}{4} \left(\frac{l^2}{2r^2} - 2r^2 \left(\frac{ik}{2R_z} - \frac{1}{\omega_z^2} \right) \right) LG_{p,l} + \\ &+ 2 \left(\frac{ik}{2R_z} - \frac{1}{\omega_z^2} \right) r^2 \sqrt{p} \exp(-i\phi) LG_{p-1,l-1} - \frac{\sqrt{p(p-1)}}{2} \exp(-2i\phi) LG_{p-2,l+2}. \end{aligned} \quad (55)$$

Теперь рассмотрим действие второго слагаемого в операторе $\hat{P}_z$.

$$\frac{iz}{k\omega_0^2} \frac{\partial}{\partial r} LG_{p,l} = \frac{iz}{k\omega_0^2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} + 1 \right) LG_{p,l}. \quad (56)$$

Пользуясь результатами выше, получаем:

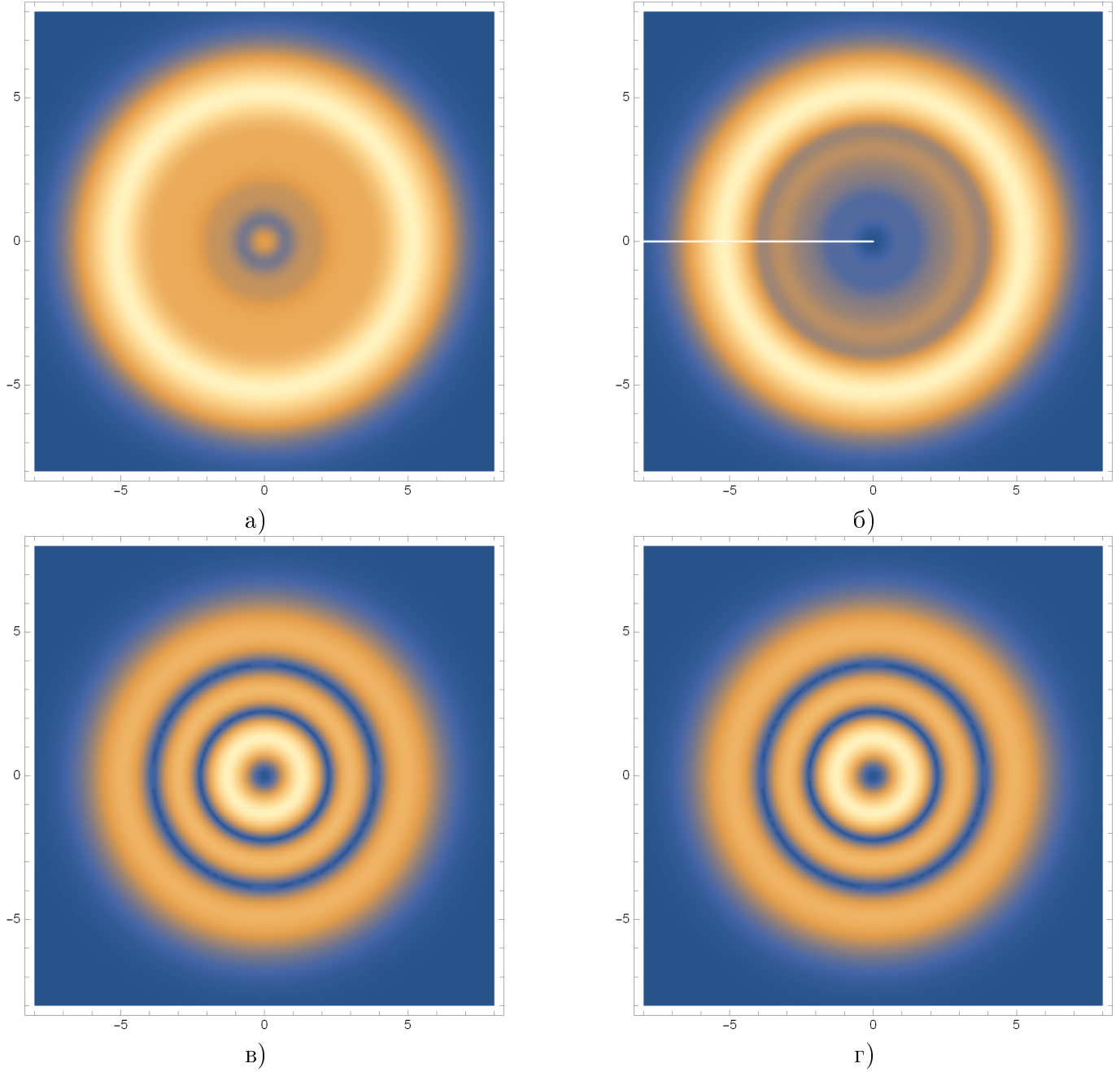
$$\begin{aligned} \frac{iz}{k\omega_0^2} \frac{\partial}{\partial r} LG_{p,l} &= \frac{iz}{k\omega_0^2} \left(p(p+1) + 2r^2 \left(\frac{ik}{2R_z} - \frac{1}{\omega_z^2} \right) + 1 \right) LG_{p,l} = \\ &= \frac{iz}{k\omega_0^2} \left(\left(2r^2 \left(\frac{ik}{2R_z} - \frac{1}{\omega_z^2} \right) + 1 \right) LG_{p,l} - \frac{4r^2}{\omega_z^2} \sqrt{p} \exp(-i\phi) \cdot LG_{p-1,l+1} \right) \end{aligned} \quad (57)$$

Остается выяснить как действует последний дифференциальный оператор $\hat{L}_z$:

$$-\frac{\hat{L}_z}{2}LG_{p,l} = \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\phi}LG_{p,l} = -\frac{1}{2}lLG_{p,l}. \quad (58)$$

Построим графики получившихся функций после действия каждого из слагаемых оператора $\hat{P}_z$ на Лагерр-Гауссову функцию.

Рис. 4: Действие слагаемых оператора $\hat{P}_z$ на Лагерр-Гауссову функцию с $n = 2, l = 2, z = 1$. а) первое слагаемое, б) второе слагаемое, в) третье слагаемое, г) исходный вид Лагерр-Гауссовой функции.



На Рис.4 видно, что наибольшее действие на расплывание пучка оказывают первое и второе слагаемые, каждое из которых зависит от пространственной координаты z . Таким образом, они будут оказывать действие на вид поперечного профиля Лагерр-Гауссова пучка тем сильнее, чем дальше пучок будет распространяться от области перетяжки. Аналогичный вывод был получен нами в пункте 3, при анализе вектора Пойнтинга Лагерр-Гауссова пучка.

6 Эрмитовость оператора радиального числа.

Оператор (39) может быть представлен в виде

$$\hat{P}_z = \hat{P}_{z=0} + \hat{Z}, \quad (59)$$

где

$$\hat{P}_{z=0} = -\frac{\omega_0^2}{8} \nabla_t^2 - \frac{\hat{L}_{z=0}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{\omega_0^2} - 1 \right), \quad (60)$$

$$\hat{Z} = -\frac{\omega_0^2}{8} \text{tg}^2(\varphi_g) \nabla_t^2 + i \frac{1}{2} \text{tg} \varphi_g \frac{\partial}{\partial r} r. \quad (61)$$

Здесь, $\hat{P}_{z=0}$ — оператор, аналогичный $\hat{P}_z$, но действующий в области перетяжки, а $\hat{Z}$ — слагаемые, появляющиеся при распространении пучка вдоль продольной оси z . В операторе $\hat{P}_{z=0}$ первое и последнее слагаемые связаны с изменением амплитуды и уширением пучка в области перетяжки по радиусу, а второе отвечает за набег фазы.

Покажем, что оператор $\hat{P}_z$ эрмитов. Оператор, являющийся суммой других операторов, эрмитов тогда и только тогда, когда эрмитов каждый из составляющих его операторов. Операторы, соответствующие первому и четвертому слагаемому, эрмитовы по определению, так как вещественны. Оператор $\hat{L}_z$ — это оператор проекции момента импульса на ось z в цилиндрической системе координат. Этому оператору соответствует физически наблюдаемая величина, так что он также эрмитов по определению. Остается последний оператор, соответствующий второму слагаемому. Этот оператор можно представить в виде произведения двух операторов, один из которых зависит только от z , а другой — только от r . Произведение двух эрмитовых операторов эрмитово только в том случае, когда они коммутируют.

$$\left[\frac{iz}{k\omega_0^2}, \frac{\partial}{\partial r} r \right] = 0, \quad (62)$$

так как r и z это базис цилиндрической системы координат. В таком случае, остается проверить на эрмитовость каждый из этих операторов по-отдельности. Оператор $\frac{iz}{k\omega_0^2}$ эрмитов, так как представляет собой компоненту оператора координаты, помноженную на комплексное число. Оператор $\frac{\partial}{\partial r} r$ в общем случае не эрмитов, так как состоит из произведения двух некоммутирующих операторов. Однако в случае выбора собственной функции такого оператора в виде Лагер-Гауссовой функции он становится эрмитовым, так как выполняется равенство

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial r} r LG_{pl}(r, \phi, z), LG_{pl}(r, \phi, z) \right\rangle = \left\langle LG_{pl}(r, \phi, z), \left(\frac{\partial}{\partial r} r \right)^\dagger LG_{pl}(r, \phi, z) \right\rangle, \quad (63)$$

где скобками $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено скалярное произведение в Гильбертовом пространстве.

Таким образом, в случае выбора Лагер-Гауссовых функций в качестве собственных функций, оператор $\hat{P}_z$ эрмитов, а значит ему соответствует физически наблюдаемая величина.

В пункте 3 мы убедились, что необходимо наложить определенные условия на Лагер-Гауссов пучок. Применяя ограничения (29), получаем:

$$\begin{aligned} \hat{Z} &= 0, \\ \hat{P}_z &= \hat{P}_{z=0}. \end{aligned} \quad (64)$$

В таком случае имеет место равенство

$$\hat{P}_{z=0} LG_{pl}(r, \phi, 0) = p LG_{pl}(r, \phi, 0). \quad (65)$$

Так как величина p является наблюдаемой, то существует принципиальная возможность использовать ее в качестве базисной переменной в квантово-информационных протоколах. При соблюдении условий (29) квантовые состояния, определяемые радиальным числом, будут устойчиво различимы на длине $2z_{max}$, даже при больших p . Это позволит перейти в задачах квантовой информатики от кубитов к кудитам с размерностью p . Кроме того, наличие протяженной области $2z_{max}$ с постоянным поперечным профилем пучка позволят надеяться на успешное решение задачи по управлению состояниями Лагер-Гауссовых мод, зависящих от p , с помощью ячеек квантовой памяти.

7 Вектор Римана-Зильберштейна. Точное решение системы уравнений Максвелла. Волновая функция в импульсном пространстве.

В этом разделе мы покажем, что возможно получить в импульсном пространстве оператор, аналогичный (39) и найдем его явный вид. Для этого нам вновь необходимо решить систему уравнения Максвелла и найти волновую функцию, имеющую вид Лагер-Гауссовых мод в импульсном представлении. Проще всего для нашей задачи это будет сделать, вводя вектор Римана-Зильберштейна.

Вектор Римана-Зильберштейна является комплексным вектором электромагнитного поля, у которого вещественная часть задается амплитудой электромагнитного поля, а чисто мнимая пропорциональна амплитуде магнитного:

$$\mathbf{F} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2}} (\mathbf{E} + ic\mathbf{B}), \quad (66)$$

где c —скорость света в вакууме, ε_0 —диэлектрическая проницаемость вакуума, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ —электрическая и магнитная индукция соответственно.

Введем скалярную функцию χ , которая содержит полную информацию о векторе $\mathbf{F}$. Получим явный вид этой функции.

В формализме вектора Римана-Зильберштейна, уравнения Максвелла в свободном пространстве имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = -ic \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \quad (67)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (68)$$

где $\mathbf{r}$ —радиус-вектор в декартовой системе координат.

Выразим вектор $\mathbf{F}$ через комплексное векторное поле $\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \left(\frac{i}{c} \mathbf{Z}(\mathbf{r}, t) + \nabla \times \mathbf{Z}(\mathbf{r}, t) \right), \quad (69)$$

Удовлетворяющую волновому уравнению

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \mathbf{Z}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (70)$$

Полагая, что пространственные компоненты поля Z имеют одинаковый вид $\chi(\mathbf{r}, t)$, запишем

$$\mathbf{Z} = (e_1, e_2, e_3) \chi(\mathbf{r}, t), \quad (71)$$

где $\chi(\mathbf{r}, t)$ — некая функция, описывающая волну, являющуюся решением уравнения (70), в координатном представлении.

Все решения волнового уравнения (70) можно представить в виде суперпозиции плоских волн в импульсном пространстве:

$$\chi(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{k} N(\mathbf{k}) (\psi^+(\mathbf{k}) e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \psi^-(\mathbf{k}) e^{i\omega_k t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}), \quad (72)$$

где $N(\mathbf{k})$ —нормировочная константа.

Используем такое разложение в цилиндрической системе координат:

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = e^{ik_z z} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{im(\phi - k_\phi)} \cdot J_m(k_t \rho), \quad (73)$$

где k_ϕ и k_t — полярная и радиальная координаты в импульсном пространстве, ρ — радиус-вектор в цилиндрической системе координат, J_m — функция Бесселя первого порядка.

Тогда выражение (72) можно представить, как

$$\chi(\mathbf{r}, t) = \sum_{m, \sigma} \int d\mathbf{k} \frac{(\sigma i)^m}{k k_t \sqrt{2}} e^{\sigma i(\omega_k t - k_z z - m(\phi - k_\phi))} J_m(k_t \rho) \psi^\sigma(\mathbf{k}), \quad (74)$$

где σ — безразмерный множитель, принимающий значения ± 1 , а $k = \sqrt{k_z^2 + k_t^2}$.

Выражение для единичного пучка в базисе Бессель-Гаусса можно получить, убрав зависимости от полярной и радиальной координат и якобиан перехода внутрь функции ψ . Тогда выражение для $\chi(\mathbf{r}, t)$ выглядит следующим образом

$$\chi_m^\sigma(r, \phi, z, t) = \int d\mathbf{k} \psi^\sigma(\mathbf{k}) e^{-i\sigma(ckt - k_z z)} J_m(k_t \rho). \quad (75)$$

Нам необходимо найти явный вид функции $\psi(\mathbf{k})$ в импульсном пространстве такой, чтобы выражение для функции, являющейся решением волнового уравнения в координатном пространстве $\chi(\mathbf{r}, t)$ имело вид Лагер-Гауссова полинома. Для этого сделаем следующую замену переменных

$$k_\pm = \frac{k \pm k_z}{2}, \quad (76)$$

$$t_\pm = t \pm \frac{z}{c}. \quad (77)$$

Тогда мы имеем

$$\chi_m^\sigma = \int_0^\infty dk_+ \int_0^\infty dk_- \int_0^{2\pi} dk_\phi \psi^\sigma(k_+, l_-) \cdot e^{-i\sigma c(k_+ t_- + k_- t_+)} J_m\left(2\rho\sqrt{k_+ k_-}\right) \quad (78)$$

Якобиан перехода снова входит в функцию $\psi(k_+, k_-)$.

Так как χ — волновая функция в координатном представлении, то $\psi^\sigma(k_+, k_-)$ волновая функция в импульсном пространстве, причем, в Бесселевом базисе. Необходимо, чтобы интеграл (78) мог быть представлен в виде Лагер-Гауссовой моды. Для этого необходимо выбрать функцию ψ^σ особым образом. Воспользуемся следующим выражением:

$$\int_0^\infty dx \cdot x^{n+m/2} e^{-\alpha x} J_m(2\beta\sqrt{x}) = \frac{n! \beta^m e^{-\beta^2/\alpha}}{\alpha^{n+m+1}} L_n^m\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right), n + m > -1. \quad (79)$$

В нашем случае удобно выбрать $x = k_-$, $\beta = \rho\sqrt{\Omega/c}$. Необходимо учесть, что в начальный момент времени в области перетяжки $t = 0, z = 0$ функция должна существовать, поэтому положим начальное уширение пучка равным ω^2 . Также необходимо учесть используемое выше разложение по плоским Бесселевым волнам вводя множитель $e^{i\sigma m k_\phi}$, где σ определяет левую или правую круговую поляризацию фотона. В таком случае, функция ψ^σ будет иметь следующий вид:

$$\psi^\sigma(k_+, k_-, k_\phi) = e^{i\sigma m k_\phi} \delta\left(k_+ - \frac{\Omega}{c}\right) k_-^{n+|m|/2} e^{-\frac{\omega^2 \Omega k_-}{c}}. \quad (80)$$

Подставим выражение (80) в (78) и проинтегрируем по k_ϕ :

$$\chi_m^\sigma = e^{i\sigma m \phi} \cdot \int_0^\infty dk_+ \int_0^\infty dk_- e^{-i\sigma c(k_+ t_- + k_- t_+)} e^{-\omega^2 \Omega k_- / c} k_-^{n+|m|/2} \delta(k_+ - \Omega/c). \quad (81)$$

Воспользуемся фильтрующим свойством дельта-функции на промежутке $-\infty <= 0 < \Omega/c < \infty$ и явно вычислим интеграл по dk_+ :

$$\chi_m^\sigma = e^{i\sigma m \phi} \cdot e^{-i\sigma \Omega t_-} \cdot \int_0^\infty dk_- k_-^{n+|m|/2} e^{-k_- (\Omega \omega^2 / c + i\sigma c t_+)} \cdot J_m\left(2\sqrt{\Omega/c} \rho \sqrt{k_-}\right). \quad (82)$$

В нашем случае, $\alpha = \Omega\omega^2/c + i\sigma ct_+$. Наконец, получаем

$$\chi_m^\sigma = \frac{n! \rho^{|m|} (c/\Omega)^{n+|m|/2+1}}{(\omega^2 + i\sigma c^2 t_+/\Omega)^{n+|m|+1}} \cdot e^{-i\sigma\Omega(t-z/c-m\phi)} \cdot e^{-\rho^2/(\omega^2+i\sigma c^2 t_+/\Omega)} L_n^{|m|} \left(\frac{\rho^2}{\omega^2 + i\sigma c^2 t_+/\Omega} \right). \quad (83)$$

Вводя новые обозначения $\mathcal{N} = n! (c/\Omega)^{n+|m|/2+1}$ — нормировочная константа, $a(t_+) = \omega^2 + i\sigma c^2 t_+/\Omega$ — комплексный параметр пучка, запишем конечный вид функции χ_m^σ :

$$\chi_m^\sigma(\rho, \phi, z, t) = \frac{\mathcal{N} \rho^{|m|}}{a(t_+)^{n+|m|+1}} \cdot e^{-i\sigma\Omega(t-z/c-m\phi)} \cdot e^{-\frac{\rho^2}{a(t_+)}} L_n^{|m|} \left(\frac{\rho^2}{a(t_+)} \right). \quad (84)$$

Таким образом, мы в точности до константы $\mathcal{N}$ получили выражение в форме Лагер-Гауссова пучка, значит, волновая функция ψ^σ в импульсном пространстве была выбрана верно.

8 Оператор радиального числа в импульсном представлении

Получим в явном виде оператор радиального числа, собственными функциями которого будут являться волновые функции (80), а собственными числами - целые числа n — радиальные индексы Лагер-Гауссовой моды.

Поддействуем оператором $k_- \frac{\partial}{\partial k_-}$ на волновую функцию (80).

$$\begin{aligned} k_- \frac{\partial}{\partial k_-} \psi^\sigma &= k_- \frac{\partial}{\partial k_-} \left(e^{i\sigma m k_\phi} \delta \left(k_+ - \frac{\Omega}{c} \right) k_-^{n + \frac{|m|}{2}} e^{-\frac{\omega^2 \Omega k_-}{c}} (2k_- + k_z) \right) = \\ &= \left(n + \frac{|m|}{2} - \frac{\omega^2 \Omega}{c} + \frac{k_-}{k} \right) \cdot e^{i\sigma m k_\phi} \delta \left(k_+ - \frac{\Omega}{c} \right) k_-^{n + \frac{|m|}{2}} e^{-\frac{\omega^2 \Omega k_-}{c}} k = \\ &= \left(n + \frac{|m|}{2} - \frac{\omega^2 \Omega}{c} + \frac{k_-}{k} \right) \psi^\sigma. \end{aligned} \quad (85)$$

Переноса $n\psi^\sigma$ в правую часть, получим

$$\left(k_- \frac{\partial}{\partial k_-} + \frac{i}{2\sigma} \frac{\partial}{\partial k_\phi} - \frac{k_-}{k} + \frac{\omega^2 \Omega}{c} k_- \right) \psi^\sigma = n\psi^\sigma, \quad (86)$$

где выполнена замена

$$\frac{m}{2} \psi^\sigma = -\frac{i}{2\sigma} \frac{\partial}{\partial k_\phi}. \quad (87)$$

Таким образом, можно записать оператор радиального момента, как

$$\hat{\mathbb{P}}_k = \left(k_- \frac{\partial}{\partial k_-} + \frac{i}{2\sigma} \frac{\partial}{\partial k_\phi} - \frac{k_-}{k} + \frac{\omega^2 \Omega}{c} k_- \right). \quad (88)$$

Полученный вид оператора (88) состоит из четырех слагаемых, также как и в случае координатного представления, однако более труден для анализа, по причине сложной трактовки слагаемых, его составляющих.

9 Разложение вектора электрической индукции поля Е по полному ортогональному набору

В данном параграфе покажем, что можно ввести полный набор ортогональных мод, различающихся радиальным числом p и использовать этот набор для квантования электромагнитного поля.

Введем следующую функцию:

$$f_p^\perp(\vec{\rho}) = C_{0,p} \cdot L_p\left(\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right) \cdot \exp -\frac{r^2}{\omega_0^2} \cdot \frac{1}{\omega_0}, \quad (89)$$

где $C_{0,p} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, а $\vec{\rho} = \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \phi \end{pmatrix}$

Убедимся в том, что это действительно полный ортонормированный набор. Для этого необходимо сосчитать скалярное произведение с весом $w(\rho) = \frac{\rho}{\omega_0^2}$, введенное по такому правилу:

$$\langle f_p^\perp(\vec{\rho}), f_{p'}^\perp(\vec{\rho}) \rangle = \int_0^\infty d\vec{\rho} w(\rho) f_p^\perp(\vec{\rho}) f_{p'}^{\perp*}(\vec{\rho}), \quad (90)$$

причем данное скалярное произведение должно обращаться в 0 при любых значениях p и p' , кроме $p = p'$. Сосчитаем скалярное произведение для двух произвольных функций $f_p^\perp(\vec{\rho})$ и $f_{p'}^\perp(\vec{\rho})$:

$$\begin{aligned} \langle f_p^\perp(\vec{\rho}), f_{p'}^\perp(\vec{\rho}) \rangle &= \int_0^\infty d\vec{\rho} \frac{\rho}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot L_p\left(\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right) \cdot e^{-\frac{r^2}{\omega_0^2}} \cdot \frac{1}{\omega_0} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot L_{p'}\left(\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right) \cdot e^{-\frac{r^2}{\omega_0^2}} \cdot \frac{1}{\omega_0} = \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \frac{2}{\pi} \int dr \frac{\rho}{\omega_0^2} \frac{1}{\omega_0^2} \cdot e^{-\frac{2r^2}{\omega_0^2}} L_p\left(\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right) L_{p'}\left(\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right) = \left| \frac{2r^2}{\omega_0^2} = x; dr = \frac{\omega_0^2 dx}{2\sqrt{2}\sqrt{x}} \right| = \\ &= \int_0^\infty dx e^{-x} \cdot L_p(x) \cdot L_{p'}(x) \end{aligned} \quad (91)$$

Покажем, что полученный интеграл в точности равняется δ -функции. Для этого необходимо вспомнить явный вид полиномов Лагера через формулу Родрига:

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \quad (92)$$

Рассмотрим определенный интеграл вида

$$\int_0^\infty e^{-x} x^m L_n(x) dx = \int_0^\infty x^m \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) = (-1)^m m! \int_0^\infty \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^m e^{-x}) dx, \quad (93)$$

где n и m — целые неотрицательные числа.

Пусть $m < n$, тогда

$$\int_0^\infty e^{-x} x^m L_n(x) dx = (-1)^m m! \left| \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} (x^m e^{-x}) \right|_{x=0}^{x=\infty} = 0. \quad (94)$$

Пусть $m = n$:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^m L_n(x) dx = (-1)^n n! \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = (-1)^n (n!)^2 \quad (95)$$

Вернемся к исходному интегралу (90). Покажем, что произведение двух полиномов Лагера в подынтегральном выражении может быть сведено к интегралу вида (93). Для этого необходимо представить полином Лагера степени n в виде конечной суммы

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k. \quad (96)$$

Подстановкой представления (96) в (91) получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx e^{-x} \cdot L_p(x) \cdot L_{p'}(x) &= \int_0^\infty dx e^{-x} \cdot L_p(x) \cdot \sum_{k=0}^{p'} \binom{p'}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{p'} \binom{p'}{k} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^\infty dx e^{-x} x^k \cdot L_p(x). \end{aligned} \quad (97)$$

При условии, что $p' < p$, для каждого слагаемого в выражении (97) можно воспользоваться результатом (94). Аналогично можно показать, что и для $p' > p$ интеграл (91) обращается в 0. В случае, когда $p = p'$, исходный интеграл можно вычислить, как

$$\int e^{-x} |L_p(x)|^2 dx = (-1)^p \int_0^\infty e^{-x} x^p L_p(x) dx = (p!)^2, \quad (98)$$

пользуясь выражением (95).

Таким образом, интеграл (91) равен

$$\langle f_p^\perp(\vec{\rho}), f_{p'}^\perp(\vec{\rho}) \rangle = (p!)^2 \cdot \delta_{p,p'}. \quad (99)$$

Такой интеграл (91) можно сосчитать и без весовой функции для произвольных p и p' .¹

Рассмотрим напряженность электромагнитного поля в виде квазиплоской монохроматической волны, распространяющейся вдоль оси z на несущей частоте ω_0 :

$$\begin{aligned} \hat{E}(\vec{\rho}, t) &= -i \left(\frac{\hbar}{8\pi} \right) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d|\vec{k}| \omega(|\vec{k}|) d\vec{q} \vec{a}(|\vec{k}|, \vec{q}) \cdot e^{i\vec{q} \cdot \vec{\rho}} \cdot e^{i(|\vec{k}| - k_0)z - i(\omega(|\vec{k}|) - \omega_0)t} \times \\ &\times e^{ik_0 z - i\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (106)$$

1

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\rho \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot L_p\left(\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2}\right) \cdot \frac{1}{\omega_0} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot L_{p'}\left(\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2}\right) \cdot \frac{1}{\omega_0} = \\ = \int_0^{2\pi} d\phi \frac{2}{\pi} \int dr \frac{1}{\omega_0^2} \cdot \exp\left(-\frac{2r}{\omega_0^2}\right) L_p\left(\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right) L_{p'}\left(\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right) = \left| \frac{2r^2}{\omega_0^2} = x; dr = \frac{\omega_0^2 dx}{2\sqrt{2}\sqrt{x}} \right| = \\ = \int_0^\infty dx \frac{\omega_0 \sqrt{2}}{\sqrt{x}} e^{-x} \cdot L_p(x) \cdot L_{p'}(x) \end{aligned} \quad (100)$$

Интеграл вида

$$I(m, n, \alpha, \beta) = \int_0^\infty x^\mu e^{-x} \cdot L_m^\alpha(x) \cdot L_n^\beta(x) \quad (101)$$

равен следующему выражению

$$I(m, n, \alpha, \beta) = \binom{m+\alpha}{n} \binom{n+\beta-\mu-1}{n} \cdot \Gamma(\mu+1) \cdot {}_3F_2(-m, \mu+1, \mu-\beta+1; \alpha+1, \mu-\beta-n+1; 1), \quad (102)$$

где ${}_3F_2(a, b, c; d, e; 1)$ — гипергеометрическая функция, равная

$$\begin{aligned} {}_3F_2(a, b, c; d, e; 1) &= \sqrt{\Gamma(1-a)} \cdot \sqrt{\Gamma(1-b)} \cdot \sqrt{\Gamma(1-c)} \cdot \Gamma(d) \cdot \Gamma(e) \cdot \sqrt{\Gamma(-a-b-c+d+e)} \cdot \\ &\frac{(d-a-b-1)(e-a-c-1)(d+e-c-1)}{8} - \frac{b+d-c-e}{2} \\ &\frac{1}{\sqrt{d+e-b-c-1}\sqrt{\Gamma(d-a)}\sqrt{\Gamma(d-b)}\sqrt{\Gamma(d-c)}\sqrt{\Gamma(e-a)}\sqrt{\Gamma(e-b)}\sqrt{\Gamma(e-c)}} \end{aligned} \quad (103)$$

Пространственную часть интеграла $\int d\vec{q} \hat{a}(|\vec{k}|, \vec{q}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{p}}$ можно разложить в ряд по введенным функциям $f_p^\perp(\vec{\rho})$:

$$\int d\vec{q} \hat{a}(|\vec{k}|, \vec{q}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{p}} = \sum_p \hat{a}_p(|\vec{k}|) f_p^\perp(\vec{\rho}). \quad (107)$$

Подставим разложение в выражение для напряженности электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} \hat{E}(\vec{\rho}, t) &= -i \left(\frac{\hbar}{8\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d|\vec{k}| \omega(|\vec{k}|) \sum_p \hat{a}_p(|\vec{k}|) f_p^\perp(\vec{\rho}) \cdot e^{i(|\vec{k}|-k_0)z - i(\omega(|\vec{k}|)-\omega_0)t} \times \\ &\times e^{ik_0z - i\omega_0t} = -i \left(\frac{\hbar\omega_0}{8\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \cdot \sum_p f_p^\perp(\vec{\rho}) e^{ik_0z - i\omega_0t} \int d|\vec{k}| \sqrt{\frac{\omega(|\vec{k}|)}{\omega_0}} \hat{a}_p(|\vec{k}|) \times \\ &\times e^{i(|\vec{k}|-k_0)z - i(\omega(|\vec{k}|)-\omega_0)t} = -i \left(\frac{\hbar\omega_0}{8\pi} \right)^{1/2} \cdot \sum_p \hat{a}_p(z, t) \cdot f_p^\perp(\vec{\rho}) e^{ik_0z - i\omega_0t} \end{aligned} \quad (108)$$

Коммутационные соотношения на операторы $\hat{a}_p(z, t)$ можно вычислить следующим образом:

$$\begin{aligned} [\hat{a}_p(z, t), \hat{a}_{p'}^\dagger(z', t)] &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d|\vec{k}| d|\vec{k}'| \sqrt{\frac{\omega(|\vec{k}|)\omega(|\vec{k}'|)}{\omega_0^2}} \cdot e^{i|\vec{k}|z - i|\vec{k}'|z' - i(\omega(|\vec{k}|)-\omega(|\vec{k}'|))t} \times \\ &\times \int d\vec{\rho} d\vec{\rho}' f_p^{\perp*}(\vec{\rho}) f_{p'}^\perp(\vec{\rho}') \int d\vec{q} d\vec{q}' [\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] \cdot e^{i\vec{q} \cdot \vec{\rho} - i\vec{q}' \cdot \vec{\rho}'} = \int d|\vec{k}| \frac{\omega(|\vec{k}|)}{\omega_0} \cdot e^{i(|\vec{k}|-k_0)(z-z')} \times \\ &\times \int d\vec{\rho} d\vec{\rho}' f_p^{\perp*}(\vec{\rho}) f_{p'}^\perp(\vec{\rho}') \int d\vec{q} \cdot e^{i\vec{q} \cdot (\vec{\rho} - \vec{\rho}')} = \frac{\delta_{p,p'}}{(p!)^2} \int d|\vec{k}| \frac{\omega(|\vec{k}|)}{\omega_0} \cdot e^{i(|\vec{k}|-k_0)(z-z')} = \\ &= \frac{\delta_{p,p'}}{(p!)^2} \left(1 - \frac{i}{k_0} \frac{\partial}{\partial z} \right) \delta(z - z'). \end{aligned} \quad (109)$$

Здесь, при разложении в ряд $\frac{\omega(|\vec{k}|)}{\omega_0}$ нами было использовано параксиальное приближение:

$$\frac{\omega(|\vec{k}|)}{\omega_0} \cdot e^{i(|\vec{k}|-k_0)(z-z')} \approx \left(1 - \frac{k_z - k_0}{k_0} \right) \cdot e^{i(|\vec{k}|-k_0)(z-z')} \approx \left(1 - \frac{i}{k_0} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot e^{i(|\vec{k}|-k_0)(z-z')}. \quad (110)$$

Таким образом, мы показали, что квантование электромагнитного поля можно провести с помощью разложения по полному ортонормированному набору мод, различающихся радиальным числом p .

В нашем случае:

$$\begin{aligned} \mu &= -\frac{1}{2} \\ \alpha &= \beta = 0 \\ m &= p \\ n &= p'. \end{aligned} \quad (104)$$

В конечном итоге получаем, что

$$\langle f_p^\perp(\vec{\rho}), f_{p'}^\perp(\vec{\rho}) \rangle = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \binom{p}{p'} \binom{p' - \frac{1}{2}}{p'} \cdot \frac{\frac{1}{16} \Gamma(\frac{3}{2} - p) (6p'(p - p' - \frac{17}{6}) + 3p + 1)}{\sqrt{-(\frac{3}{2} + p')(p - p' + \frac{3}{2})(p - p' - \frac{1}{2})} \Gamma(-p')} \quad (105)$$

В случае, когда $p' > p$, первый биномиальный коэффициент равняется нулю и тогда обнуляется все итоговое выражение. При $p = p'$, никаких особенностей не возникает и результатом является некоторое число, следовательно, выбранные функции $f_p^\perp(\vec{\rho})$ действительно ортогональны.

10 Система уравнений Гайзенберга в модели рамановской квантовой памяти для Лагер-Гауссовых мод

Будем рассматривать рамановскую модель квантовой памяти на основе ансамбля холодных атомов. В данной модели и сильное лазерное 'управляющее', и квантовое слабое 'сигнальное' поля сильно отстроены от резонансных частот соответствующих атомных переходов. Управляющее поле распространяется на несущей частоте ω_d , сигнальное — на частоте ω_s . Частоты ω_d и ω_s отстроены на величину Δ от частот атомных переходов ω_{23} и ω_{13} .

В начальный момент времени все атомы находятся в состоянии $|1\rangle$, управляющее поле действует на переходе $|2\rangle - |3\rangle$, а квантовое — на переходе $|1\rangle - |3\rangle$. В рамановской схеме отстройка частот приводит к тому, что верхний уровень практически не заселяется, и процесс является двухфотонным — в каждом взаимодействии полей с атомом поглощается фотон квантового поля и излучается стоксовский фотон, то есть фотон с большей длиной волны, в моду управляющего поля.

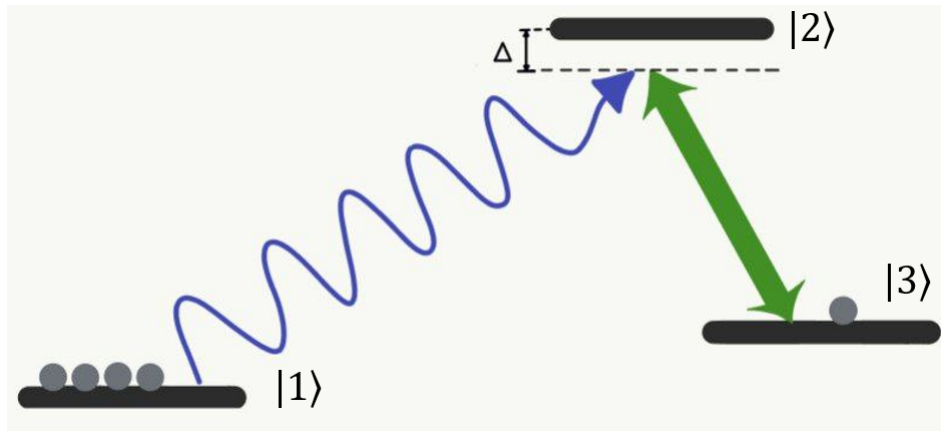


Рис. 5: Λ -схема энергетических уровней. Синяя стрелка — квантовое слабое поле, зеленая — управляющее сильное поле, Δ — величина отстройки.

Пусть оба поля представляют собой квазимонохроматические квазиплоские волны, распространяющиеся вдоль оси z . Обе этих волны — сигнальную и управляющую будем рассматривать в параксиальном приближении. Здесь и далее будем работать в приближении медленно меняющейся амплитуды.

Представим огибающую квантового поля в виде набора мод Лагер-Гаусса:

$$\begin{aligned}\vec{E}_d(\vec{r}, t) &= -iE_0(\vec{r}, t)e^{-i\omega_d t + ik_d z}\vec{\epsilon}_d + c.c. \\ \vec{E}_s(\vec{r}, t) &= -i\left(\frac{\hbar\omega_0}{8\pi}\right)^{1/2} \cdot \sum_p \hat{a}_p(z, t) \cdot f_p^\perp(\vec{\rho})e^{ik_0 z - i\omega_0 t},\end{aligned}\tag{111}$$

где ρ, ϕ, z — цилиндрические координаты, k_d, k_s — волновые числа, соответствующие несущим частотам, $f_p^\perp(\vec{\rho})$ — функция Лагер-Гаусса в плоскости $z = 0$ с азимутальным числом $l = 0$. Операторы уничтожения и рождения фотонов в моде Лагер-Гаусса с индексом p подчиняются коммутационным соотношениям и определены так, что среднее $\langle \hat{a}_p^\dagger(z, t) \hat{a}_p(z, t) \rangle$ имеет смысл потока частиц в моде $f_p^\perp(\vec{\rho})$.

Перейдем к описанию взаимодействия с атомным ансамблем на языке коллективных опера-

торов когерентности и заселенности:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{ij} &= \sum_{k=1}^{N_{at}} \hat{\zeta}_{ij}^k(t) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_k) \\ \hat{N}_i(\vec{r}, t) &= \hat{\sigma}_{ii}(\vec{r}, t) = \sum_{k=1}^{N_{at}} \hat{\zeta}_{ii}^k(t) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_k),\end{aligned}\tag{112}$$

где операторы $\hat{\zeta}_{ij}(t)$ — проекторы состояния $|j\rangle$ на состояние $|i\rangle$ в момент времени t : $\hat{\zeta}_{ij} = |i\rangle\langle j|$, $\omega_{ij} = \omega_i - \omega_j$ — частота перехода между соответствующими атомными уровнями, $\vec{\epsilon}_{ij}$ — вектор поляризации такого перехода. Вектора дипольного момента переходов $\vec{\epsilon}_{13}$ и $\vec{\epsilon}_{23}$ совпадают с векторами поляризации сигнального и управляющего полей соответственно. Коммутационные соотношения для введенных подобным образом коллективных переменных можно представить в следующем виде:

$$[\hat{\sigma}_{ij}(\vec{r}, t), \hat{\sigma}_{np}(\vec{r}', t)] = (\delta_{ij} n \hat{\sigma}_{ip}(\vec{r}, t) - \delta_{i,p} \hat{\sigma}_{nj}(\vec{r}, t)) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}').\tag{113}$$

В рамках дипольного приближения и приближения вращающейся волны, гамильтониан взаимодействия атомов с классическим и квантовым полем записывается в следующей форме:

$$\begin{aligned}\hat{V}(\vec{r}, t) &= \int d\vec{r} i \hbar g \hat{\sigma}_{31}^f(\vec{r}) \sum_p \hat{a}_p^f(z, t) \cdot f_p^\perp(\vec{\rho}) - \int d\vec{r} i \hbar g \hat{\sigma}_{13}^f(\vec{r}) \sum_p \hat{a}_p^{f\dagger}(z, t) \cdot f_p^{\perp*}(\vec{\rho}) + \\ &+ \int d\vec{r} i \hbar \Omega(\vec{r}, t) \hat{\sigma}_{32}^f(\vec{r}) e^{-i\omega_d t + i k_d z} - \hat{\sigma}_{23}^f(\vec{r}) e^{i\omega_d t - i k_d z}.\end{aligned}\tag{114}$$

Здесь нами были введены обозначения для константы связи атома с полем g и частоты Раби Ω :

$$g = \sqrt{\frac{\omega_s}{8\pi\hbar c}} d_{13}; \quad \Omega(\vec{r}, t) = \frac{E_0(\vec{r}, t) d_{23}}{\hbar}.\tag{115}$$

Также были использованы обозначения для матричных элементов оператора дипольного момента перехода между уровнями $|i\rangle$ и $\langle j|$ — d_{ij} . Поскольку уравнения Гейзенберга строятся для быстро меняющихся переменных, гамильтониан может быть записан через быстро меняющиеся переменные (с верхним индексом f), связанные с исходными следующим образом:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{ij}^f(\vec{r}, t) &= \hat{\sigma}_{ij}(\vec{r}, t) e^{-i\omega_{ij} t}, \\ \hat{a}_p^f(z, t) &= \hat{a}_p e^{i k_z z - i \omega_s t}.\end{aligned}\tag{116}$$

Воспользуемся свободным гамильтонианом и гамильтонианом в рамках дипольного приближения и приближении вращающейся волны и запишем уравнения Гейзенберга для полевых и атомных переменных. При этом сосредоточимся на описании эволюции каждой отдельной полевой моды Лагер-Гаусса. Записывая уравнения взаимодействия моды с индексом m и атомной

системы, получаем:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} + C \frac{\partial}{\partial z}\right) \hat{a}_m &= -g \int d\vec{\rho}' \hat{\sigma}_1 \mathfrak{Z}(\vec{\rho}', z) f_p^{\perp*}(\vec{\rho}), \\
\dot{\hat{\sigma}}_{13} &= -i\Delta \hat{\sigma}_{13} + g \sum_p \hat{a}_p f_p^{\perp} \left(\hat{N}_1 - \hat{N}_3 \right) + \Omega \hat{\sigma}_{12}, \\
\dot{\hat{\sigma}}_{12} &= -g \sum_p \hat{a}_p f_p^{\perp} \hat{\sigma}_{32} - \Omega \hat{\sigma}_{13}, \\
\dot{\hat{\sigma}}_{32} &= -i\Delta \hat{\sigma}_{32} + g \sum_p \hat{a}_p^{\dagger} f_p^{\perp*} \hat{\sigma}_{12} + \Omega \left(\hat{N}_2 - \hat{N}_3 \right), \\
\dot{\hat{N}}_1 &= -g \sum_p \hat{a}_p f_p^{\perp} \hat{\sigma}_{31} - g \sum_p \hat{a}_p^{\dagger} f_p^{\perp*} \hat{\sigma}_{14}, \\
\dot{\hat{N}}_2 &= -\Omega \left(\hat{\sigma}_{32} - \hat{\sigma}_{23} \right), \\
\dot{\hat{N}}_3 &= -\dot{\hat{N}}_1 - \dot{\hat{N}}_2.
\end{aligned} \tag{117}$$

11 Вывод

В первой части данной работы было определено спектральное уравнение на собственные числа, являющиеся радиальным индексом Лагер-Гауссовых мод. Это уравнение было разрешено в координатном и импульсном представлениях, был найден явный вид оператора, собственными функциями которого являются Лагер-Гауссовы моды, а собственными числами — радиальные числа соответствующих мод. Было показано, что данный оператор в общем случае неэрмитов, однако, при выборе соответствующего набора собственных функций — например, Лагер-Гауссовых мод, для него выполняется условие эрмитовости. Это позволяет говорить о том, что радиальному числу p соответствует физически наблюдаемая величина. И действительно, регистрация числа p может производиться экспериментально при помощи CCD камер.

Также в первой части работы был построен вектор Умова-Пойнтинга для Лагер-Гауссовых мод. Анализ поведения модуля вектора Пойнтинга позволил наложить условия на размеры Лагер-Гауссова пучка для его эффективного использования в задачах квантовой информатики. Также показано, что при условиях, когда уширение пучка крайне мало при увеличении пространственной координаты z , то есть выполняется условие (29), оператор радиального числа $\hat{P}_z$ редуцируется к оператору радиального числа в области перетяжки $\hat{P}_{z=0}$.

Во второй части работы приводится пример возможного использования радиального числа Лагер-Гауссовых мод в задачах квантовой информатики. Рассматривается рамановская модель квантовой памяти, в которой слабое квантовое поле раскладывается по полному набору Лагер-Гауссовых мод, различающихся радиальным числом p . Доказана возможность такого разложения, а также получена система уравнений Гейзенберга, описывающая эволюцию атомно-полевой системы в рамках дипольного приближения.

Приложение А. Вывод вида оператора $\hat{P}_0$

Поддействуем оператором (32) на функцию $NPT(x, \phi)$. Для начала распишем действие частных производных по x :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} NPT(x, \phi) &= \frac{|l|}{2} x^{\frac{|l|-2}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{x}{2} + il\phi\right) - \frac{1}{2} x^{\frac{|l|}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{x}{2} + il\phi\right), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} NPT(x, \phi) &= \frac{|l|}{2} \left(\frac{|l|}{2} - 1\right) x^{\frac{|l|-4}{2}} \exp\left(-\frac{x}{2} + il\phi\right) - \frac{|l|}{2} x^{\frac{|l|}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2} + il\phi\right) + \frac{1}{4} x^{\frac{|l|}{2}} \exp\left(-\frac{x}{2} + il\phi\right)\end{aligned}\quad (118)$$

$$\begin{aligned}\left[(x-l-1)\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] NPT(x, \phi) &= (x-l-1)\frac{|l|}{2} x^{\frac{|l|-2}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{x}{2} + il\phi\right) - \frac{1}{2} x^{\frac{|l|}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{x}{2} + il\phi\right) - \\ &- x\frac{|l|}{2} \left(\frac{|l|}{2} - 1\right) x^{\frac{|l|-4}{2}} \exp\left(-\frac{x}{2} + il\phi\right) - \frac{|l|}{2} x^{\frac{|l|}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2} + il\phi\right) + \frac{1}{4} x^{\frac{|l|}{2}} \exp\left(-\frac{x}{2} + il\phi\right).\end{aligned}\quad (119)$$

Рассмотрим теперь действие первой и второй частных производных по ϕ на функцию $NPT(x, \phi)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \phi} NPT(x, \phi) &= ilx^{\frac{|l|}{2}} \exp\left(-\frac{x}{2} + il\phi\right), \\ \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} &= -l^2 x^{\frac{|l|}{2}} \exp\left(-\frac{x}{2} + il\phi\right).\end{aligned}\quad (120)$$

Перегруппируем члены в выражении (119). Выделим в них частные производные по ϕ и получим

$$\left[-\frac{1}{4x}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\right] \cdot B_p^l NPT(x, \phi) L_p^{|l|}(x) = B_p^l NPT(x, \phi) pL_p^{|l|}, \quad (121)$$

$$\left[-\frac{1}{4x}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\right] LG_{pl}(x, \phi) = pLG_{nl}(x, \phi). \quad (122)$$

Сделаем обратное преобразование и перейдем от частных производных по x к частным производным по r .

Воспользуемся правилом перехода к новой системе координат для частных производных:

$$\begin{aligned}r &= \omega_0 \sqrt{\frac{x}{2}}, \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\omega_0^2}{4r} \frac{\partial}{\partial r}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= -\frac{\omega_0^4}{16r^3} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\omega_0^4}{16r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2}.\end{aligned}\quad (123)$$

Подставим найденные значения в выражение для оператора, действующего на Лагер-Гауссову функцию в левой части выражения (122) и преобразуем его

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4x}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} &= -\frac{\omega_0^2}{8r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{2r^2}{\omega_0^2} \cdot \left(-\frac{\omega_0^4}{16r^3}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\omega_0^4}{16r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial \phi} - \\ -\frac{\omega_0^2}{4r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{r^2}{2\omega_0^2} - \frac{1}{2} &= -\frac{\omega_0^2}{8}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{\omega_0^2} - 1\right) \equiv \hat{P}_0.\end{aligned}\quad (124)$$

Приложение Б. Вывод оператора $\hat{\mathbb{P}}_z$

Для начала пересчитаем частные производные по x в терминах частных производных по r и z :

$$x = \frac{2r^2}{\omega_z^2},$$

$$dx = \frac{4rdr}{\omega_0^2 + \frac{4z^2}{k^2\omega_0^2}} - \frac{16r^2zdz}{\left(\omega_0^2 + \frac{4z^2}{k^2\omega_0^2}\right)^2} = \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial z}dz \Rightarrow \quad (125)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial r} = \frac{4r}{\omega_0^2 + \frac{4z^2}{k^2\omega_0^2}}, \\ \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{16r^2z}{\left(\omega_0^2 + \frac{4z^2}{k^2\omega_0^2}\right)^2} \end{cases} \quad (126)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \quad (127)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) + \\ &+ \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \\ &+ \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \quad (128)$$

Пересчитаем эти выражения в терминах наших переменных. Подставляя в (127) и (128) выражения (126) получаем следующее:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\omega_0^2 + \frac{4z^2}{k^2\omega_0^2}}{4r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\omega_0^2 + \frac{4z^2}{k^2\omega_0^2}}{16r^2z} \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left(\frac{\omega_0^2 + \frac{4z^2}{k^2\omega_0^2}}{4r} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\left(\omega_0^2 + \frac{4z^2}{k^2\omega_0^2}\right)^3}{8r^3z} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} + \frac{\left(\omega_0^2 + \frac{4z^2}{k^2\omega_0^2}\right)^4}{256r^4z^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \\ &- \left(\frac{\left(\omega_0^2 + \frac{4z^2}{k^2\omega_0^2}\right)^2}{16r^3} + \frac{\left(\omega_0^2 + \frac{4z^2}{k^2\omega_0^2}\right)^2}{16r^2} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\left(\omega_0^2 + \frac{4z^2}{k^2\omega_0^2}\right)^3}{32r^4z} - \frac{\omega_0^2 \left(\omega_0^2 + \frac{4z^2}{k^2\omega_0^2}\right)^3}{256r^4z^3} \right) \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned} \quad (129)$$

откуда

$$\begin{aligned} x \frac{\partial}{\partial x^2} &= \frac{\omega_0^2 + \frac{4z^2}{k^2\omega_0^2}}{8} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\left(\omega_0^2 + \frac{4z^2}{k^2\omega_0^2}\right)^2}{4rz} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} + \frac{\left(\omega_0^2 + \frac{4z^2}{k^2\omega_0^2}\right)^3}{128r^2z^2} - \frac{\omega_0^2 + \frac{4z^2}{k^2\omega_0^2}}{4r} \frac{\partial}{\partial r} + \\ &+ \left(\frac{\left(\omega_0^2 + \frac{4z^2}{k^2\omega_0^2}\right)^2}{16r^2z} - \frac{\omega_0^2 \left(\omega_0^2 + \frac{4z^2}{k^2\omega_0^2}\right)^2}{128r^2z^3} \right) \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \quad (130)$$

Подставляя выражения (129) и (130) в выражение для оператора (122) и преобразуя его получаем

$$\hat{\mathbb{P}}_z \equiv -\frac{\omega_z^2}{8} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) + \frac{iz}{k\omega_0^2} \frac{\partial}{\partial r} r + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{\omega_0^2} - 1 \right). \quad (131)$$

Учтем, что

$$\begin{aligned}\hat{L}_z &= -i \frac{\partial}{\partial \phi} - \text{оператор орбитального углового момента,} \\ \nabla_t^2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.\end{aligned}\tag{132}$$

Тогда, окончательно, искомый вид оператора, собственными функциями которого являются Лагер-Гауссовы функции LG_{pl} , имеет вид

$$\hat{\mathbb{P}}_z = -\frac{\omega_z^2}{8} \nabla_t^2 + \frac{iz}{k\omega_0^2} \frac{\partial}{\partial r} r - \frac{\hat{L}_z}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{\omega_0^2} - 1 \right).\tag{133}$$

Литература

- [1] Vashukevich E.A., Golubeva T.Yu., Golubev Yu. M. Conversion and storage of modes with orbital angular momentum in a quantum memory scheme // Phys. Rev. A. 2020. V. 101. P. 033830.
- [2] Niu M.Y., Chuang I.L., and Shapiro J.H. Qudit-Basis Universal Quantum Computation Using χ^2 Interactions // Phys. Rev. Lett. 2018. V. 120. P. 160502.
- [3] Абрамочкин Е.Г., Волостников В.Г. Спиральные пучки света // УФН. 2004. Т. 174. С. 1273.
- [4] Pellatz N.P. The orbital angular momentum of light // Honor Thesis. Whitman College. 2014. P. 37.
- [5] Mirhosseini M., Magaña-Loaiza O.S., Chen Ch., Rodenburg B., Malik M., Boyd R.W. Rapid generation of light beams carrying orbital angular momentum // Optics Express. 2013. V. 21. P. 30196.
- [6] Plick W.N., Krenn M. Physical meaning of the radial index of Laguerre-Gauss beams // Phys. Rev. A. 2015. V. 92. P. 063841.
- [7] Plick W.N., Lapkiewicz R., Ramelow S., Zeilinger A. The Forgotten Quantum Number: A short note on the radial modes of Laguerre-Gauss beams // arXiv:1306.6517 [quant-ph].
- [8] Allen, L. and Padgett, M. (2000) The Poynting vector in Laguerre-Gaussian beams and the interpretation of their angular momentum density. Optics Communications, 184(1), 67 -71.
- [9] H. A. Haus, "Waves and Fields in Optoelectronics", Prentice-Hall, New Jersey, 1984.