Письма в ЖЭТФ, том 93, вып. 3, с. 129 – 133 © 2011 г. 10 февраля

Обобщенная формула для естественной ширины спектра излучения квантовых генераторов

А. С. Чиркин[1], *А. В. Шипулин*[2]*

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 119992 Москва, Россия

**Институт прикладной физики Университета им. Ф. Шиллера, D-07743 Йена, Германия*

Поступила в редакцию 22 декабря 2010 г.

В рамках двухуровневой модели активной среды предложен простой способ расчета ширины линии источников стимулированного когерентного излучения, обусловленной спонтанным шумом и тепловыми флуктуациями. Формула для ширины спектра выведена без использования адиабатического приближения при произвольном соотношении времен релаксации в автоколебательной системе и при учете конечной полосы спектра спонтанного излучения. Полученный результат применим для широкого класса источников когерентного излучения.

Предметом настоящего письма является изложение нового подхода к расчету естественной ширины спектральной линии источников вынужденного электромагнитного излучения без условия на соотношения времен релаксации автоколебательной системы, что позволило получить формулу для ширины спектральной линии, пригодной для широкого класса квантовых генераторов. Ширина спектра квантовых генераторов имеет важное значение для их применения. Поэтому его исследованию уделяется большое внимание с момента запуска первых молекулярных генераторов [1, 2] (см. также монографии [3, 4] и цитируемую там литературу). С появлением квантовых генераторов оптического диапазона (лазеров) теорию их флуктуаций пришлось разрабатывать заново [5, 6]. В лазерах основным источником шума является спонтанное излучение [7 – 9] в отличие от мазеров, где доминируют тепловые флуктуации. Кроме того, в мазерах и лазерах, излучающих в различных диапазонах электромагнитных волн, соотношение времен релаксации физических параметров также различно.

Квантовые генераторы представляют собой систему двух связанных резонансных контуров, добротности которых обычно сильно различаются. Поэтому при теоретическом анализе их флуктуаций используют адиабатическое приближение, в котором изменение быстро релаксирующих параметров рассматривают квазистатически. Вместе с тем в нанолазерах, вызывающих в настоящее время повышенное внимание исследователей (см., например, [10 – 13]), потери контуров могут быть сравнимы. Так, потери металлических нанорезонаторов, обусловленные главным образом омическими потерями, приводят к большим коэффициентам затухания $\gamma \sim 10^{13}\,\text{с}^{-1}$ [14] (см. ниже).

В данной работе теория флуктуаций излучения квантовых генераторов развивается для произвольного соотношения времен релаксаций. Последовательный анализ флуктуаций в квантовых генераторах должен основываться на квантовомеханической теории. Вместе с тем и полуклассический подход, которым мы воспользуемся здесь, дает корректные результаты для ширины линии лазерного излучения при описании активной среды отрицательными потерями с насыщением [8, 9] и при использовании результатов квантового расчета для источников флуктуаций [15 – 17].

Будем рассматривать одномодовый квантовый генератор с активной средой, обладающей однородно уширенной линией резонансного перехода. При полуклассическом анализе процесс генерации описывается следующей системой связанных уравнений (см., например, [16, 18, 19]):

$$\begin{gathered}
\frac{d^2P(t)}{dt^2} + 2\gamma_2\frac{dP(t)}{dt} + \omega_0^2 P(t) = -\frac{2|d|^2\omega_0}{\hbar}EN,\\
\frac{dN(t)}{dt} + \gamma_1(N(t) - N_0) = \frac{2}{\hbar\omega_0}E\frac{dP}{dt},\\
\frac{d^2E(t)}{dt^2} + 2\gamma\frac{dE}{dt} + \omega_0^2 E(t) = -4\pi\frac{d^2P(t)}{dt^2}.
\end{gathered}\tag{1}$$

В уравнениях $P(t)$ – поляризация активной среды, $N(t)$ – разность населенностей рабочих уровней (N_0 – равновесное значение в отсутствие излучения), $E(t)$ – напряженность электрического поля в резонаторе, d – матричный элемент дипольного момента рабочего перехода, $\gamma_2 = 1/T_2$ и $\gamma_1 = 1/T_1$ (T_2 и T_1 – времена релаксации поляризации и населеннос-

[1]e-mail: aschirkin@rambler.ru
[2]e-mail: arkadi.chipouline@uni-jena.de

тей уровней). Коэффициент γ учитывает потери в резонаторе. В уравнениях (1) для упрощения дальнейшего анализа положили, что резонансная частота двухуровневого перехода ω_{21} и частота резонатора ω_c совпадают $\omega_{21} = \omega_c = \omega_0$.

Решение уравнений (1) ищем в виде:

$$P(t) = \frac{1}{2}p(t)e^{i\omega_0 t} + \text{к.с.},\ E(t) = \frac{1}{2}A(t)e^{i\omega_0 t} + \text{к.с.} \tag{2}$$

В приближениях медленно меняющихся комплексных амплитуд и волн вращающейся поляризации получим систему укороченных уравнений:

$$\dot{p} + \gamma_2 p = \frac{i|d|^2}{\hbar}AN + \xi_{sp}(t), \tag{3}$$

$$\dot{N} + \gamma_1(N - N_0) = \frac{i}{2\hbar}(pA^* - p^*A), \tag{4}$$

$$\dot{A} + \gamma A = -i2\pi\omega_0 p + \xi_T(t), \tag{5}$$

где точка означает временную производную.

В уравнениях (3), (5) добавлены ланжевеновские флуктуационные источники $\xi_{sp}(t)$ и $\xi_T(t)$, обусловленные соответственно спонтанным излучением атомов (молекул) активной среды и тепловым шумом резонатора, и которые, как уже отмечалось, последовательно могут быть получены из квантового анализа (см., например, [7, 16, 17]). Флуктуационный источник в (4) опущен, поскольку он не оказывает значительного влияния на характеристики излучения квантового генератора. Флуктуационные силы $\xi_{sp}(t)$ и $\xi_T(t)$ статистически независимы. При этом случайный процесс $\xi_T(t)$ считаем, как обычно, дельта-коррелированным:

$$\langle\xi_T(t)\rangle = 0,\ \langle\xi_T(t_1)\xi_T^*(t_2)\rangle = 2D_T\delta(t_2 - t_1), \tag{6}$$

а процесс $\xi_{sp}(t)$ будем полагать “цветным” шумом с временем корреляции $\tau_c = 1/\gamma_2$:

$$\langle\xi_{sp}(t)\rangle = 0,\ \langle\xi_{sp}(t_1)\xi_{sp}^*(t_2)\rangle = \gamma_2 D_{sp}\exp[-\gamma_2|t_2 - t_1|]. \tag{7}$$

Это выражение позволяет учесть конечную полосу шума спонтанного излучения. При $\gamma_2 \to \infty$ ($T_2 \to \to 0$) коррелятор $< \xi_{sp}(t_1)\xi_{sp}^*(t_2) > \to 2D_{sp}\delta(t_2 - t_1)$. Значения коэффициентов $D_{sp,T}$ обсуждаются ниже.

Для решения поставленной задачи нам понадобится еще одно уравнение:

$$\frac{d\Sigma}{dt} + (\gamma + \gamma_2)\Sigma(t) = \eta(t), \tag{8}$$

которое нетрудно получить из системы (3)–(5), где

$$\Sigma(t) = p(t)A^*(t) + p^*(t)A(t) \tag{9}$$

и $\eta(t)$ – случайная функция:

$$\eta(t) = p(t)\xi_T^*(t) + A^*(t)\xi_{sp}(t) + \text{к.с.} \tag{10}$$

При этом среднее $\langle\eta(t)\rangle = 0$, так как флуктуации $p(t)$ непосредственно зависят только от $\xi_{sp}(t)$, а $A(t)$ – от $\xi_T(t)$. Корреляционная функция процесса $\eta(t)$ равна

$$\begin{aligned}\langle\eta(t)\eta(t_1)\rangle &= 4D_T|p(t)|^2\delta(t_1 - t) + \\ &+ 2\gamma_2 D_{sp}|A(t)|^2\exp[-\gamma_2|t_2 - t_1|].\end{aligned} \tag{11}$$

Представим комплексную амплитуду $A(t)$ поля в виде $A(t) = |A(t)|\exp(i\varphi(t))$, при этом выражение для фазы $\varphi(t)$ запишем как

$$\varphi(t) = \frac{1}{i2}\ln(\frac{A(t)}{A^*(t)}), \tag{12}$$

в соответствии с которым динамику фазы, в отличие от традиционных подходов, описываем уравнением

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\dot{A}A^* - A\dot{A}^*}{i2|A|^2}. \tag{13}$$

Практический интерес представляет надпороговый режим генерации, характеризуемый малым уровнем флуктуаций амплитуды $|A(t)|$. В этом случае в знаменателе (13) можно пренебречь амплитудными флуктуациями, то есть считать $|A(t)|^2 = |A_{st}|^2$ (A_{st} – стационарное значение амплитуды колебаний).

Подставляя в (13) значение $\dot{A}$ из (5), получим

$$\dot{\varphi}(t) = -\frac{1}{2|A_{st}|^2}[2\pi\Sigma + i\zeta_T(t)]. \tag{14}$$

В этом уравнении $\zeta_T(t)$ можно записать в виде:

$$\zeta_T(t) = A_{nc}^*(t)\xi_T(t) - A(t)_{nc}\xi_T^*(t), \tag{15}$$

где $A(t)_{nc}$ – часть случайного процесса $A(t)$, которая не коррелирует с $\xi_T(t)$, и поэтому $\langle\zeta_T(t)\rangle = 0$. В (15) произведена замена $A(t)$ на $A(t)_{nc}$, которая не влияет на статистические характеристики процесса $\zeta_T(t)$. Дело в том, что вследствие дельта-коррелированности процесса $\xi_T(t)$ (время корреляции $\tau_{\xi_T} \to 0$) с ним может коррелировать лишь приращение $\delta A(t)$ функции $A(t)$, полученное в моменты времени, непосредственно предшествующие моменту t. Поэтому на интервале времени Δt таком, что $\tau_{\xi_E} \ll \Delta t \ll \gamma^{-1}$, можно записать $A(t) = = A(t - \Delta t)_{nc} + \delta A(t)$, где коррелированная часть $\delta A(t)$ равна

$$\delta A(t) = \int_{t-\Delta t}^{t} \xi_T(t^{'})dt^{'}, \tag{16}$$

причем $A(t-\Delta t)_{nc}$ заменяем на $A(t)_{nc}$, учитывая малость изменения $A(t)_{nc}$ на интервале Δt. Обоснование такого подхода изложено, например, в [20]. Принимая во внимание (5), имеем

$$\langle \delta A(t)\xi_T^*(t)\rangle = \langle \delta A^*(t)\xi_T(t)\rangle = \\ = \int_{t-\Delta t}^{t} \langle \xi_T^*(t)\xi_T(t^{'})\rangle dt^{'} = D_T. \tag{17}$$

Вследствие этого коррелированная часть амплитуды $A(t)$ не влияет на статистику процесса $\zeta_T(t)$ с корреляционной функцией

$$\langle \zeta_T(t)\zeta_T(t_1)\rangle = -4|A_{st}|^2 D_T \delta(t_1 - t). \tag{18}$$

В соответствии с (14) и (8) $\langle \dot{\varphi}(t)\rangle = 0$, а приращение фазы $\Delta\varphi(\tau)$ и его дисперсия $\langle \Delta\varphi^2(\tau)\rangle$ на интервале времени τ определяются выражениями

$$\Delta\varphi(\tau) = \int_{t-\tau}^{t} \dot{\varphi}(t^{'})dt^{'}, \\ \langle (\Delta\varphi(\tau))^2\rangle = \int\int_{t-\tau}^{t} \langle \dot{\varphi}(t^{''})\dot{\varphi}(t^{'})\rangle dt^{''}dt^{'}. \tag{19}$$

Для нахождения корреляционной функции $R_{\dot{\varphi}}(t^{''}-t^{'}) = \langle \dot{\varphi}(t^{''})\dot{\varphi}(t^{'})\rangle$ воспользуемся соотношением Винера-Хинчина:

$$R_{\dot{\varphi}}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{\varphi}}(\Omega)e^{i\Omega\tau}d\tau, \tag{20}$$

где $S_{\dot{\varphi}}(\Omega)$ – спектральная плотность флуктуаций девиации частоты $\delta\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$.

С помощью фурье-преобразования уравнений (8), (14) находим выражение для фурье-спектра $\dot{\varphi}(\Omega)$. Учитывая статистическую стационарность случайных процессов $\xi_{sp}(t)$ и $\xi_T(t)$, можно получить следующее выражение: $\langle \dot{\varphi}(\Omega_1)\dot{\varphi}(\Omega)\rangle = S_{\dot{\varphi}}(\Omega)\delta(\Omega_1 - \Omega)$. Подстановка выражения для $S_{\dot{\varphi}}(\Omega)$ в (20), а последнего в (19) приводит к такому результату для дисперсии набега фазы:

$$\langle (\Delta\varphi(\tau))^2\rangle = \frac{D_T}{|A|^2}|\tau| + \frac{\gamma^2 - 2\gamma\Gamma}{\Gamma^3|A|^2}D_T F(\Gamma|\tau|) + \\ + \frac{(2\pi\omega_0\gamma_2)^2}{|A|^2}D_{sp}\left\{\frac{F(\gamma_2|\tau|)}{\gamma_2^3(\Gamma^2-\gamma_2^2)} - \frac{F(\Gamma|\tau|)}{\Gamma^3(\Gamma^2-\gamma_2^2)}\right\}. \tag{21}$$

Здесь $\Gamma = \gamma + \gamma_2$ и

$$F(x) = e^{-x} + x - 1. \tag{22}$$

В уравнении (21) и ниже для упрощения записи у параметров A, p, N индекс st опущен. Напомним, что стационарные значения этих параметров определяются без учета флуктуаций в уравнениях (3)–(5). Кроме того, в (21) p выражено через A из стационарного уравнения (5).

Спектральная плотность поля определяется по формуле

$$S_E(\omega) = \frac{|A|^2}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\frac{1}{2}\langle (\Delta\varphi(\tau))^2\rangle - i(\omega-\omega_0)\tau]d\tau \tag{23}$$

и в общем случае может быть рассчитана только численно. Аналитические результаты удается получить в частных случаях.

С шириной спектра поля $\Delta\omega_{osc}$ связано время корреляции $\tau_c^{(E)} \simeq (\Delta\omega_{osc})^{-1}$. Пусть $\gamma_2\tau_c^{(E)} \gg 1$, то есть $\gamma_2 \gg \Delta\omega_{osc}$. Тогда $< (\Delta\varphi(\tau))^2 >= D_{\varphi}|\tau|$. Форма спектра излучения при этом лоренцевская с шириной по половинному уровню, равной

$$\Delta\omega_{osc} = D_{\varphi} = \frac{\gamma_2^2}{(\gamma+\gamma_2)^2|A|^2}(D_T + (2\pi\omega_0/\gamma_2)^2 D_{sp}). \tag{24}$$

При выводе выражения (24) мы не использовали какие-либо предположения о соотношении времен релаксации, связанных с коэффициентами $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$. Поэтому полученная формула (24) для естественной ширины спектра излучения квантовых генераторов является общей и применима к широкому классу квантовых генераторов, динамику которых можно описать с помощью двухуровневой модели активной среды. Однако следует иметь в виду, что источник шума $\xi_{sp}(t)$ при принятом условии фактически считается дельта-коррелированным, что может быть некорректно относительно флуктуаций поляризации, если ширина спектра излучения $\Delta\omega_{osc}$ сравнима с $1/\gamma_2$. Для учета последнего необходимо исходить из формулы (21). Связанный с этим обстоятельством эффект можно продемонстрировать на следующем примере. Пусть $\Gamma|\tau| \gg 1$, но $\gamma_2|\tau| < 1$. Тогда имеем

$$\langle (\Delta\varphi(\tau))^2\rangle = \\ = \frac{\gamma_2^2}{(\gamma+\gamma_2)^2|A|^2}(D_T + (2\pi\omega_0/\gamma_2)^2 D_{sp})|\tau| - \\ - \frac{(1-0,5\gamma_2|\tau|)(2\pi\omega_0)^2}{(\Gamma^2-\gamma_2^2)|A|^2}D_{sp}|\tau|. \tag{25}$$

Отсюда нетрудно видеть, что по сравнению с (24) наличие последнего слагаемого в формуле (25) приводит к уменьшению ширины спектра и модификации его формы.

Коэффициент D_T, связанный с тепловыми шумами, можно определить, пользуясь флуктуационно-диссипативной теоремой или принципом равнораспределения энергии по степеням свободы [8, 9]. Средняя тепловая энергия моды в резонаторе в окрестности частоты ω_0 равна

$$\langle w(\omega_0)\rangle = \hbar\omega_0\bar{n}, \quad \bar{n} = \frac{1}{e^{\hbar\omega_0/k_B T}-1}, \tag{26}$$

где $\bar{n}$ – среднее число тепловых фотонов в моде, k_B – постоянная Больцмана и T – абсолютная температура. Заметим, что в (26) не учитывается энергия нулевых колебаний, проявляющаяся в замене $\bar{n}$ на $\bar{n}+0,5$. Согласно (5), для пассивного резонатора, то есть при $p(t)=0$, спектральная плотность флуктуаций амплитуды $A(t)$ дается выражением

$$S_A(\Omega) = \frac{D_T}{\pi(\gamma^2+\Omega^2)}. \tag{27}$$

В соответствии с этим выражением для тепловой энергии моды имеем

$$\langle w(\omega_0)\rangle = \frac{D_T}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\Omega}{\gamma^2+\Omega^2} = \frac{D_T}{2\gamma}, \tag{28}$$

Из сравнения (26) и (28) находим

$$D_T = 2\gamma\hbar\omega_0\langle n\rangle. \tag{29}$$

Сложнее задача определения коэффициента D_{sp}, который зависит от характеристик двухуровневой среды (из атомов или молекул) и учитывает спонтанное излучение. Соответствующие его квантовые расчеты можно найти, например, в [7, 16, 17]. Вместе с тем структура выражения (24) позволяет обойтись без необходимости обращения к этой задаче. При $\gamma_2 \gg \gamma$ (твердотельные лазеры) выражение (24) переходит в формулу, известную как формула Шавлова-Таунса. Записанная через измеряемые параметры, она имеет вид [8, 9]

$$\Delta\omega_{osc}^{(ST)} = \frac{2\gamma^2\hbar\omega_0}{P_0}\left[\langle n\rangle + \frac{N_2}{N_2-(g_2/g_1)N_1}\right]. \tag{30}$$

Здесь $P_0 = 0.5\gamma|A|^2$ – мощность излучения генератора, включающая как мощность на выходе резонатора, так и мощность, идущую на компенсацию потерь, $\gamma = 0,5\Delta\omega_{res}$ ($\Delta\omega_{res}$ – полоса пропускания пассивного резонатора), $N = N_2 - (g_2/g_1)N_1$ – разность населенностей между верхним N_2 и нижним N_1 уровнями вблизи порога генерации, g_2 и g_1 – кратность вырождения уровней. Заметим, что первое слагаемое в формуле (30) связано с коэффициентом (29).

Формулу (24) можно записать таким образом в виде

$$\Delta\omega_{osc} = 2\left(\frac{\gamma\gamma_2}{\gamma+\gamma_2}\right)^2\frac{\hbar\omega_0}{P_0}\left[\langle n\rangle + \frac{N_2}{N_2-(g_2/g_1)N_1}\right]. \tag{31}$$

Формула (31) обобщает выражение (30) для ширины спектральной линии квантового генератора на произвольное соотношение параметров релаксации γ и γ_2. Если ввести добротность резонатора $Q_{res} = 2\omega_0/\gamma$ и "добротность уровней перехода" $Q_{lev} = 2\omega_0/\gamma_2$, то формулу (31)можно записать так:

$$\Delta\omega_{osc} = \frac{2\hbar\omega_0^3}{(Q_{res}+Q_{lev})P_0}\left[\langle n\rangle + \frac{N_2}{N_2-(g_2/g_1)N_1}\right]. \tag{32}$$

Отсюда видно, что ширина линии излучения зависит от суммы добротностей резонатора и двухуровневого перехода.

Проиллюстрируем применение полученных результатов. Для молекулярного генератора на молекулах аммиака (мазера) [18] частота генерации $\nu_0 = \omega_0/2\pi = 2.4\cdot 10^{10}$ Гц ($\hbar\omega_0 = 1.5\cdot 10^{-16}$ эрг), $\gamma_2 = 6.6\cdot 10^3\,\text{с}^{-1}$, $\gamma \simeq 6\cdot 10^6\,\text{с}^{-1}$ ($\gamma_2 \ll \gamma$). И даже при температуре $T = 300^o$ энергия $k_B T = 4\cdot 10^{-14}$ эрг $\gg \hbar\omega_0$. Вследствие этого $\hbar\omega_0\bar{n} = k_B T$, и последним слагаемым в (31) можно пренебречь. В результате для молекулярного генератора получаем известный результат [1, 3]:

$$\Delta\omega_{osc} = \frac{2\gamma_2^2 k_B T}{P_0}. \tag{33}$$

В рассмотренном примере спектральная ширина линии зависит от тепловых флуктуаций и параметра γ_2, который определяется временем нахождения молекул в резонаторе [1, 3].

В лазерах реализуется противоположная ситуация: $\gamma_2 \gg \gamma$, $k_B T \ll \hbar\omega_0$; и основную роль играют параметр резонатора γ и спонтанное излучение (последнее слагаемое в (30)).

Развитый в работе подход к расчету фазовых флуктуаций излучения позволяет, таким образом, с единых позиций проанализировать спектральную ширину линии квантовых генераторов с различными соотношениями времен релаксации. Формулы (21), (31) справедливы и для расчета спектральной ширины линии в случае сопоставимых значений коэффициентов γ и γ_2, например, для нанолазера, когда адиабатическое приближение нельзя использовать. Вместе с тем в публикациях отсутствуют данные, которые можно было бы применить для сравнения с полученными нами результатами в этом случае. Хотя авторы работы [13] наблюдали сужение спектра полосы генерации нанолазера до 2–5 нм, его интерпретация не позволяет, однако, однозначно приписать этот эффект стимулированному излучению. В заключение отметим, что развитый в настоящей работе метод может быть использован для расчета спектра излучения параметрических генераторов света.

---

1. В. С. Троицкий, ЖЭТФ **34**, 390 (1958); Радиотехникаи и электроника **3**, 1298 (1958).
2. A. L. Schawlow and C. H. Townes, Phys. Rev. **112**, 1940 (1958).
3. Дж. Зингер, *Мазеры. Квантовые усилители и генераторы*, М.: Наука, 1961.
4. А. Н. Малахов, *Флуктуации в автоколебательных системах*, М.: Наука, 1968.
5. Ф. Арекки, М. Скалли, Г. Хакен, В. Вайдлих, *Квантовые флуктуации излучения лазера*, М.: Мир, 1974.
6. М. Лэкс, *Флуктуации и когерентные явления*, М.: Мир, 1974.
7. Г. Хакен, *Лазерная светодинамика*, М.:Мир, 1988.
8. С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, А. С. Чиркин, *Введение в статистическую радиофизику и оптику*, М.: Наука, 1981.
9. А. Ярив, *Квантовая электроника*, М.: Сов. радио, 1980.
10. D. J. Bergman and M. I. Stockman, Phys. Rev. Letts. **90**, 027402 (2003).
11. N. I. Zheludev, S. L. Prosvirin, N. Papasimakis, and V. A. Fedotov, Nature Photonics **2**, 351 (2008).
12. I. E. Protsenko, A. V. Uskov, O. A. Zaimidoroga et al., Phys. Rev. A **71**, 063812 (2005).
13. M. A. Noginov, G. Zhu, A. M. Belgrave et al., Nature **460**, 1110 (2009).
14. J. Petschulat, C. Menzel, A. Chipouline et al., Phys. Rev. A **78**, 043811 (2008).
15. *Волновые и флуктуационные явления в лазерах*, под ред. Ю. Л. Климонтовича, М.: Наука, 1974.
16. A. N. Oraevsky, J. Opt. Soc. Am. B. **5**, 933 (1988).
17. М. О. Скалли, М. С. Зубайри, *Квантовая оптика*, М.: Физматлит, 2003.
18. Г. М. Страховский, А. В. Успенский, *Основы квантовой электроники*, М.: Высшая школа, 1973.
19. Р. Пантел, Г. Путхоф, *Основы квантовой электроники*, М.: Мир, 1972.
20. С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, А. С. Чиркин, *Статистическая радиофизика и оптика. Случайные колебания и волны в линейных системах*, М.: Физматлит, 2010.