

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(СПбГУ)

Кафедра общей физики I  
Направление 03.03.02 «Физика»



Соотношение ввода-вывода излучения в резонатор: сравнение  
микроскопического и феноменологического подходов

Бакалаврская работа студентки  
**Баевой Александры Вячеславовны**

Научный руководитель:  
к.ф.-м.н. **Лосев А.С.**

Рецензент:  
к.ф.-м.н. **Герасимов Л.В.**

Санкт-Петербург

2019

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Феноменологический подход</b>	<b>4</b>
1.1 Классическое поле в двух связанных резонаторах . . . . .	4
1.2 Квантование мод связанных резонаторов . . . . .	6
1.3 Резонатор, взаимодействующий с классическим полем . . . . .	8
1.4 Скорость затухания поля в резонаторе . . . . .	9
<b>2 Микроскопический подход</b>	<b>10</b>
2.1 Учёт взаимодействия полей связанных резонаторов . . . . .	10
2.2 Допустимые значения волновых чисел . . . . .	11
2.3 Квантование электромагнитного поля . . . . .	12
<b>Заключение</b>	<b>16</b>
<b>Литература</b>	<b>17</b>
<b>Приложение А</b>	<b>18</b>
<b>Приложение В</b>	<b>19</b>

## Введение

Квантовая информатика и квантовая оптика на сегодняшний день являются одними из активно развивающихся областей науки [1]. Квантовая природа света часто проявляется, например, в процессах взаимодействия света с веществом [2]. Квантовый подход широко применяется в рассмотрении лазерных систем. Оптические резонаторы позволяют усилить взаимодействие между светом и веществом, поэтому их часто используют для реализации различных квантово-информационных протоколов, таких как квантовая память [3], квантовое перепутывание [4] и т.д. Для этого рассматривается взаимодействие как с одиночными атомами [5] и ионами [6], так и с атомными ансамблями холодных [7] и горячих атомов [8]. Однако квантовые эффекты наблюдаются не только непосредственно при взаимодействии света с активной средой, помещенной внутрь оптического резонатора. Описание взаимодействия внутрирезонаторного поля с внешними модами является так же важной задачей.

В данной работе мы рассматриваем резонатор с потерями, осуществляющимися за счёт пропускания одного из зеркал. В связи с этим возникают вопросы об учёте взаимодействия внутрирезонаторного поля с внешними модами. К этой проблеме существуют два подхода: феноменологический и микроскопический. Феноменологический подход основан на квантовой теории диссипаций. При таком рассмотрении сначала производится квантование электромагнитных полей, а затем, учитывается взаимодействие между модами. При микроскопическом подходе, наоборот, сначала учитывается взаимодействие, а после производится квантование электромагнитного поля внутри резонатора. В работе будут рассмотрены оба подхода, которые отражают, что наличие взаимодействия мод резонатора с внешними модами через пропускающее зеркало приводит к затуханию поля внутри резонатора.

# 1 Феноменологический подход

Перейдём непосредственно к рассмотрению феноменологического подхода, изложенного во многих учебниках, например в [9]. Он основан на теории квантовых диссипаций, изучающей квантовые аналоги процесса необратимой потери энергии, наблюдаемого на классическом уровне. При таком подходе к рассмотрению взаимодействия внешнего электромагнитного поля с внутрирезонаторным сначала происходит квантование поля, а затем учёт взаимодействия между модами. Рассмотрим стандартную задачу, описывающую взаимодействие выделенной моды резонатора с одной из внешних мод.

## 1.1 Классическое поле в двух связанных резонаторах

При разборе данной задачи для удобства мы будем рассматривать два линейных связанных резонатора. Рассмотрим для начала случай, когда оба резонатора имеют конечные длины  $L_1$  и  $L_2$  (Рис. 1). Мы считаем, что  $L_1 \neq L_2$ . Наружные зеркала такого резонатора являются полностью отражающими ( $R = 1$ ), а коэффициент отражения для связующего зеркала по модулю близок к единице. Значит, мы рассматриваем замкнутую систему. Эти условия позволят нам в дальнейшем квантовать связанные поля.

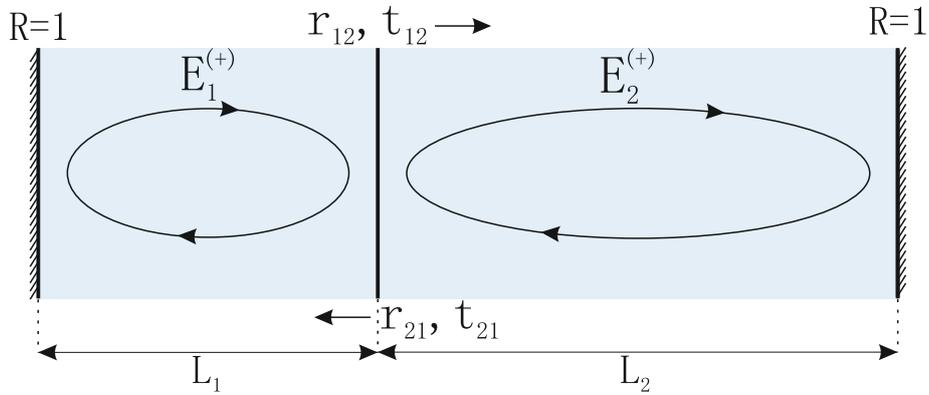


Рис. 1: Система связанных линейных резонаторов.

Поля  $E_1^{(+)}$  и  $E_2^{(+)}$  связаны между собой через пропускающее зеркало. Коэффициенты отражения и пропускания для каждой из сторон зеркала обозначены как  $r_{ij}$  и  $t_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ . Такое зеркало можно описывать как светоделительную пластинку. Тогда связь между входными и выходными полями будет описываться унитарной матрицей  $U$

$$U = \begin{bmatrix} t_{21} & r_{12} \\ r_{21} & t_{12} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Сама связь между полями в резонаторах примет вид

$$\begin{bmatrix} E_{1\leftarrow}^{(+)} \\ E_{2\rightarrow}^{(+)} \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} E_{2\leftarrow}^{(+)} \\ E_{1\rightarrow}^{(+)} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где стрелками указаны направления входных и выходных бегущих волн.

Так как преобразование унитарно, то  $|r|^2 + |t|^2 = 1$ , где  $r = r_{12} = -r_{21}^*$  и  $t = t_{12} = t_{21}^*$ . Будем в нашем рассмотрении считать, что  $|r| \approx 1$ , тогда мы можем говорить о существовании в резонаторах двух независимых полей, оказывающих друг на друга влияние через зеркало. Запишем уравнения для полей в каждом из резонаторов, учитывая накопленную при обходе фазу:

$$\begin{aligned} E_1^{(+)}(t + \tau_{rt1})e^{-i\omega_1(t+\tau_{rt1})} &= r_{12}E_1^{(+)}(t)e^{-i\omega_1 t} + t_{21}E_2^{(+)}(t)e^{-i\omega_2 t}, \\ E_2^{(+)}(t + \tau_{rt2})e^{-i\omega_2(t+\tau_{rt2})} &= r_{21}E_2^{(+)}(t)e^{-i\omega_2 t} + t_{12}E_1^{(+)}(t)e^{-i\omega_1 t}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\tau_{rt1} = 2L_1/c$  и  $\tau_{rt2} = 2L_2/c$  - это времена обхода первого и второго резонаторов соответственно. Если мы предположим наличие слабой связи между резонаторами, то уравнения (3) сведутся к скоростным уравнениям (Приложение А):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} E_1^{(+)} \\ E_2^{(+)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_{12}e^{i\omega_1\tau_{rt1}} - 1}{\tau_{rt1}} & \frac{t_{21}e^{-i\Delta t}}{\tau_{rt1}} \\ \frac{t_{12}e^{i\Delta t}}{\tau_{rt2}} & \frac{r_{21}e^{i\omega_2\tau_{rt2}} - 1}{\tau_{rt2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1^{(+)} \\ E_2^{(+)} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где  $\Delta = \omega_2 - \omega_1$  - разность частот собственных мод резонаторов. Введём также следующие обозначения для сдвига частоты  $\delta\omega_i$  и коэффициенты  $\chi_{ij}$ :

$$\delta\omega_1 = i \left( \frac{r_{12}e^{i\omega_1\tau_{rt1}} - 1}{\tau_{rt1}} \right), \quad \delta\omega_2 = i \left( \frac{r_{21}e^{i\omega_2\tau_{rt2}} - 1}{\tau_{rt2}} \right), \quad (5)$$

$$\chi_{12} = i \frac{t_{21}}{\tau_{rt1}}, \quad \chi_{21} = i \frac{t_{12}}{\tau_{rt2}}. \quad (6)$$

С учётом выражений (5),(6) перепишем выражение (4):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} E_1^{(+)} \\ E_2^{(+)} \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} \delta\omega_1 & \chi_{12}e^{-i\Delta t} \\ \chi_{21}e^{i\Delta t} & \delta\omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1^{(+)} \\ E_2^{(+)} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Найдём теперь моды поля, выживающего в обоих резонаторах:  $\omega_1, \omega_2 \rightarrow \omega$ . Мы рассматриваем стационарный случай. Тогда производная поля по времени, стоящая в левой части выражения (7) равна нулю, а значит, что система разрешима в том случае, когда определитель матрицы в правой части соотношения также равен нулю. Это значит, что

$$(r_{12}e^{i\omega_1\tau_{rt1}} - 1)(r_{21}e^{i\omega_2\tau_{rt2}} - 1) = t_{21}t_{12}. \quad (8)$$

Выражение (8) определяет разрешенные частоты  $\omega$ . Однако, для удобства в дальнейшем рассмотрении, мы сохраним исходные обозначения  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Пусть коэффициенты пропускания зеркал  $t_{12}$  и  $t_{21} \sim \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  некоторый малый параметр возмущения. Тогда  $\delta\omega_1, \delta\omega_2 \sim \varepsilon^2$ , если выполнено условие  $|r| = \sqrt{1 - |t|^2} \approx 1 - \frac{|t|^2}{2}$ . Таким образом, диагональные

элементы матрицы стремятся к нулю и в дальнейшем система уравнений переписется в виде

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} E_1^{(+)} \\ E_2^{(+)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i\chi_{12}e^{-i\Delta t} \\ -i\chi_{21}e^{i\Delta t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1^{(+)} \\ E_2^{(+)} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Проведём так называемое в англоязычной литературе rotating frame approximation (RFA) [9], для устранения явной временной зависимости, обозначив поля следующим образом

$$\tilde{E}_1^{(+)} = E_1^{(+)} e^{i\Delta t}, \quad \tilde{E}_2^{(+)} = E_2^{(+)}, \quad (10)$$

тогда

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{E}_1^{(+)} \\ \tilde{E}_2^{(+)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\Delta & -i\chi_{12} \\ -i\chi_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_1^{(+)} \\ \tilde{E}_2^{(+)} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Формально динамика мод двух резонаторов может быть сопоставлена с динамикой двухуровневого атома, взаимодействующего с классическим полем. Недиagonальные элементы матрицы отождествляются с частотой Раби  $\Omega$ , которая является мерой взаимодействия диполя с возбуждающим полем.

## 1.2 Квантование мод связанных резонаторов

Перейти к квантовому описанию поля можно сделав переход от напряженности электрического поля к операторам поля  $\hat{a}_i$

$$E_i^{(+)}(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\sqrt{\frac{\hbar\omega_i}{2\epsilon_0 V_i}} f'_i(\mathbf{r}) \hat{a}_i(t). \quad (12)$$

где  $f'_\alpha(\mathbf{r})$  - безразмерные модовые функции. Скоростные уравнения (11) для операторов поля  $\hat{a}_1(t), \hat{a}_2(t)$  мы можем интерпретировать как уравнения Гайзенберга

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\Delta & -ig_{12} \\ -ig_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Здесь также произведено приближение RFA. Коэффициенты  $g_{ij}$  определены как

$$g_{12} = \chi_{12} \sqrt{\frac{\omega_2 V_1}{\omega_1 V_2}}, \quad g_{21} = \chi_{21} \sqrt{\frac{\omega_1 V_2}{\omega_2 V_1}}. \quad (14)$$

В рассматриваемой задаче нет зависимости поля от поперечных координат, поэтому квантуемые объемы  $V_1 = AL_1$  и  $V_2 = AL_2$ , где площадь  $A$  одинаковая для обоих резонаторов площадь поперечного сечения. Тогда нетрудно увидеть, что  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{L_1}{L_2}$ . Кроме того, здесь мы должны вспомнить о том, что  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ . Поэтому коэффициенты связи примут вид

$$g_{12} = \chi_{12} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}, \quad g_{21} = \chi_{21} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}, \quad (15)$$

где, с учетом определения (6) коэффициентов  $\chi_{ij}$ , мы можем переписать предыдущие соотношения

$$g_{12} = \frac{ict_{21}}{2\sqrt{L_1 L_2}}, \quad g_{21} = \frac{ict_{12}}{2\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (16)$$

Сопоставим систему уравнений (13) с уравнением Гайзенберга

$$\dot{\hat{a}} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{a}, \hat{H}]. \quad (17)$$

Получим гамильтониан  $\hat{H}$  как сумму свободного гамильтониана в приближении RFA,

$$\hat{H}_0 = -\hbar\Delta\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 \quad (18)$$

и гамильтониана взаимодействия

$$\hat{H}_{12} = \hbar(g_{21}\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger + g_{12}\hat{a}_2\hat{a}_1^\dagger), \quad (19)$$

также в приближении RFA. Однако, если посмотреть на соотношения (16), определяющие коэффициенты  $g_{ij}$ , можно заметить, что такой гамильтониан не является эрмитовым. Для того, чтобы гамильтониан взаимодействия стал эрмитовым, необходимо, чтобы  $t_{21} = -t_{12}^*$ . Таким образом,  $g_{21} = g_{12} \equiv g \in \Re$  и

$$\hat{H}_{12} = \hbar g(\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2\hat{a}_1^\dagger). \quad (20)$$

Помимо RFA при рассмотрении системы было сделано приближение вращающейся волны, так как мы не учитываем в гамильтониане членов на двойных оптических частотах  $\sim a_i a_j$  и  $a_i^\dagger a_j^\dagger$ ,  $i, j = 1, 2$ .

Вернёмся теперь к виду выражений с явной временной зависимостью, сделав преобразование обратное к RFA. Тогда свободный гамильтониан окажется тривиален

$$\hat{H}_0 = 0, \quad (21)$$

а гамильтониан взаимодействия примет вид

$$\hat{H}_{12} = \hbar g(\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger e^{i\Delta t} + \hat{a}_2\hat{a}_1^\dagger e^{-i\Delta t}). \quad (22)$$

Если мы будем рассматривать систему в представлении Шрёдингера, то получим альтернативный свободный гамильтониан

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_1 \left( \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_2 \left( \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \frac{1}{2} \right), \quad (23)$$

а также гамильтониан взаимодействия, эквивалентный гамильтониану в приближении RFA:

$$\hat{H}_{12} = \hbar g(\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2\hat{a}_1^\dagger). \quad (24)$$

Можем считать, что рассмотрение в представлении Шрёдингера и RFA гамильтониан эквивалентны.

### 1.3 Резонатор, взаимодействующий с классическим полем

Рассмотренная выше задача о двух связанных резонаторах позволит нам описать взаимодействие оптического резонатора с пропускающим зеркалом с внешним электромагнитным полем. Пусть левый резонатор (Рис. 2) будет как и в предыдущей задаче резонатором конечной длины  $L$ . Оператор поля  $\hat{a}_1 \rightarrow \hat{a}$ . Правый резонатор заменяется на резонатор бесконечной длины, поле внутри которого классическое. Без каких либо ограничений мы можем рассматривать классическое поле как падающую бегущую волну. Пренебрегая флуктуациями числа фотонов по сравнению со средним числом, можем сделать замену  $\hat{a}_2 \rightarrow \alpha$ , если поле находится в когерентном состоянии  $\alpha$ .

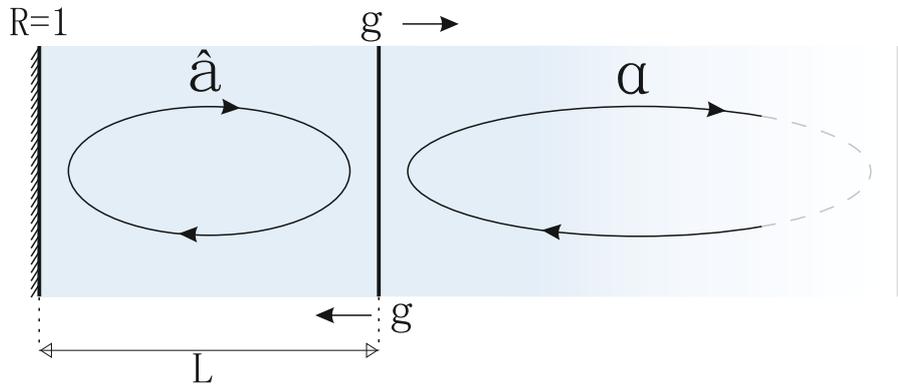


Рис. 2: Резонатор, взаимодействующий с классическим полем.

Свободный гамильтониан для резонатора

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (25)$$

Гамильтониан взаимодействия примет вид

$$\hat{H}_{12} = \hbar\mathcal{E} (\hat{a}e^{i\omega_L t} + \hat{a}^\dagger e^{-i\omega_L t}), \quad (26)$$

где  $\mathcal{E} = \alpha g \in \Re$ ,  $\omega_2 \rightarrow \omega_L$  - внешняя управляющая частота для резонатора.

Рассматриваемая система эквивалентна двухуровневому атому, взаимодействующему с классическим полем в том случае, если  $\hat{a}$  сопоставляется оператору атомной когерентности верхнего и нижнего атомного уровня  $\hat{\sigma}$ ,  $\omega$  - с частотой атомного резонанса,  $\omega_L$  - с частотой классического поля и  $2\mathcal{E}$  с частотой Раби.

## 1.4 Скорость затухания поля в резонаторе

Из-за того, что одно из зеркал резонатора пропускает, мы наблюдаем затухание внутрирезонаторного поля. Введём величину, описывающую скорость затухания энергии электромагнитного поля в резонаторе

$$C = \frac{|t_{21}|^2}{\tau_{rt1}}, \quad (27)$$

где  $\tau_{rt1} = 2L_1/c$ . Так как резонатор описывается как система квантовых осцилляторов, то мы можем рассматривать задачу о квантовом осцилляторе с затуханием и решать далее уравнение

$$\dot{\hat{a}} = -\left(\frac{C}{2} + i\omega\right)\hat{a}, \quad (28)$$

решение которого имеет вид

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-Ct/2}e^{-i\omega t}. \quad (29)$$

Проверим для полученного решения коммутационные соотношения

$$[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)] = [\hat{a}(0), \hat{a}^\dagger(0)]e^{-Ct/2} = e^{-Ct/2}. \quad (30)$$

Соотношения между одновременными операторами должны сохраняться во времени. Однако, мы видим, что в данном случае это не так. Значит решения в виде (29) не может существовать. Однако, если мы учтём шумы в выражении (28), то есть взаимодействие внутрирезонаторного поля с внешними модами через зеркало связи, предварительно сделав преобразование RFA  $\hat{\tilde{a}} = \hat{a}e^{i\omega t}$  то получим

$$\dot{\hat{\tilde{a}}} + \frac{C}{2}\hat{\tilde{a}} = \hat{F}(t), \quad (31)$$

где  $\hat{F}(t)$  - оператор ланжевеновского шума. Данное уравнение называется уравнением Гейзенберга-Ланжевена, его решение записывается в виде

$$\hat{\tilde{a}}(t) = \hat{\tilde{a}}(0)e^{-Ct/2} + \int_0^t \hat{F}(t')e^{-C(t-t')/2} dt' \quad (32)$$

Для такого решения, учитывающего шумы коммутационные соотношения выполняются, если

$$[F(t'), F^\dagger(t'')] = C\delta(t' - t''). \quad (33)$$

Тогда

$$[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)] = [\hat{a}(0), \hat{a}^\dagger(0)]e^{-Ct/2} + \int_0^t \int_0^t dt' dt'' [F(t'), F^\dagger(t'')]e^{-c(t-t')/2}e^{-c(t-t'')/2} = 1. \quad (34)$$

В результате получено взаимодействие внутрирезонаторного поля с внешними модами вида (31).

## 2 Микроскопический подход

При рассмотрении микроскопического подхода к учёту взаимодействия внутрирезонаторного поля с внешними модами мы перейдём от одномодовой задачи к многомодовой. В отличие от феноменологического подхода, рассмотренного выше, при микроскопическом подходе сначала происходит учёт взаимодействия электромагнитных полей, а затем производится квантование внутрирезонаторного поля.

### 2.1 Учёт взаимодействия полей связанных резонаторов

Рассмотрение задачи начнём так же с двух связанных резонаторов конечной длины  $l$  и  $L$  (Рис.3). Для удобства введём такую систему отсчёта для кольцевых резонаторов, в которой координата отсчитывается по направлению обхода резонатора. Так для резонатора длины  $L$   $x \in [0, L]$ , а для резонатора длины  $l$   $z \in [0, l]$ . Обход будем совершать в направлении стрелок, указанных на рисунке.

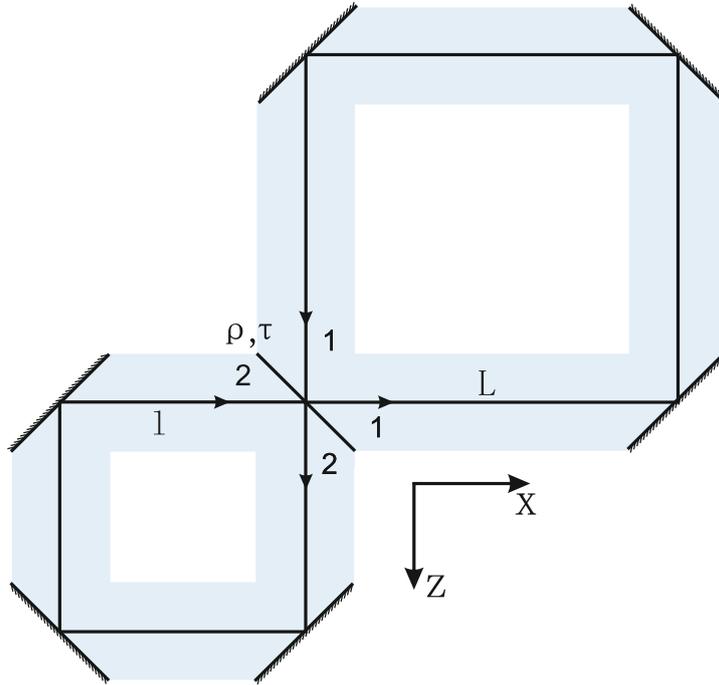


Рис. 3: Связанные кольцевые резонаторы

Поле в резонаторе описывается линейной комбинацией плоских монохроматических бегущих волн  $\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \sim e^{i(\vec{k}\vec{r})} f_{\vec{k}}$

$$E(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} C_{\vec{k}} \psi_{\vec{k}}(\vec{r}). \quad (35)$$

Функции  $\psi_k(\vec{r})$  составляют полный ортонормированный набор (Приложение В). Тогда нормированные функции  $\psi_k(\vec{r}) = V^{-1/2} e^{i(\vec{k}\vec{r})} f_k$ , где  $V$  - объём, занимаемый электромагнитным полем,  $f_k$  - модовые функции. Зеркало связи считаем пропускающим с коэффициентами отражения  $\rho$  и пропускания  $\tau$ , для которых выполняется соотношение  $|\rho|^2 + |\tau|^2 = 1$ .

Найдём связь между электромагнитными полями обоих резонаторов, сшивая их на зеркале. Эта связь описывается унитарным преобразованием  $U$

$$U = \begin{bmatrix} -\rho & i\tau \\ i\tau & -\rho \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Теперь получим систему уравнений с которой будем работать в дальнейшем

$$\begin{bmatrix} \psi_k^{(out)}(x=0) \\ \psi_k^{(out)}(z=0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho & i\tau \\ i\tau & -\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_k^{(in)}(x=0) \\ \psi_k^{(in)}(z=0) \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Связь между входными и выходными полями описывается соотношениями

$$\begin{bmatrix} \psi_k^{(in)}(x=0) \\ \psi_k^{(in)}(z=0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_k^{(out)}(x=0)e^{ikL} \\ \psi_k^{(out)}(z=0)e^{ikl} \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Решая уравнения (37) с учётом связи (38), приходим к системе двух уравнений

$$\begin{cases} \psi_k^{(out)}(x=0) = -\rho e^{ikL} \psi_k^{(out)}(x=0) + i\tau e^{ikl} \psi_k^{(out)}(z=0) \\ \psi_k^{(out)}(z=0) = i\tau e^{ikL} \psi_k^{(out)}(x=0) - \rho e^{ikl} \psi_k^{(out)}(z=0) \end{cases}. \quad (39)$$

Эти соотношения справедливы в том случае, если остальные зеркала являются идеально отражающими, то есть для них коэффициенты отражения и пропускания соответственно равны  $r = 1$ ,  $t = 0$ .

## 2.2 Допустимые значения волновых чисел

Нетривиальное решение однородной системы уравнений (39) возможно лишь в том случае, когда определитель системы равен нулю. А именно

$$(1 + \rho e^{ikL})(1 + \rho e^{ikl}) + \tau^2 e^{ik(l+L)} = 0. \quad (40)$$

Решение данного трансцендентного уравнения даст нам допустимые значения волновых чисел для представленной системы резонаторов. Рассмотрим сначала случаи  $\rho = 0$  и  $\rho = 1$ . При  $\rho = 0$ , то мы рассматриваем случай, когда зеркало отсутствует, и в таком изломанном резонаторе длины  $l + L$  выживают  $k = \pi(2n + 1)/(l + L)$ ,  $n \in Z$ . А при  $\rho = 1$  мы получаем два идеальных резонатора, в которых выживают только их собственные моды. То есть  $k_1 = \pi(2n + 1)/l$ ,  $n \in Z$  и  $k_2 = \pi(2n + 1)/L$ ,  $n \in Z$ .

Перепишем выражение (40), раскрыв скобки, и учтём, что  $\rho^2 + \tau^2 = 1$

$$1 + \rho e^{ikL} + \rho e^{ikl} + e^{ik(l+L)} = 0. \quad (41)$$

Переписав экспоненты с помощью формулы Эйлера, можем рассматривать отдельно вещественную и мнимую части уравнения. Рассмотрим вещественную часть уравнения (39)

$$1 + \rho \cos kl + \rho \cos kL + \cos k(l+L) = 0. \quad (42)$$

Применив тригонометрические формулы для суммы косинусов с разными аргументами и косинуса двойного угла получим

$$2 \cos \frac{k}{2}(l+L) \left[ \rho \cos \frac{k}{2}(l-L) + \cos \frac{k}{2}(l+L) \right] = 0. \quad (43)$$

Для мнимой части уравнения (41) получим

$$\rho \sin kl + \rho \sin kL + \sin k(l+L) = 0. \quad (44)$$

Применив аналогично тригонометрические формулы для суммы синусов с разными аргументами и косинуса двойного угла получим

$$2 \sin \frac{k}{2}(l+L) \left[ \rho \cos \frac{k}{2}(l-L) + \cos \frac{k}{2}(l+L) \right] = 0. \quad (45)$$

Легко увидеть, что решением уравнения, дающим искомые  $k$  будет решение следующего равенства

$$\rho \cos \frac{k}{2}(l-L) + \cos \frac{k}{2}(l+L) = 0, \quad (46)$$

которое мы найдём графически, взяв для определённости значение коэффициента  $\rho = 0.9$ , длину малого резонатора  $l = 1$ , а длину большого резонатора будем менять (Рис.4). Красным цветом представлено решение для косинуса суммы, а синим для косинуса разности.

Для удобства анализа полученных результатов построим полученные решения на отдельных графиках (Рис.5). Как можно легко заметить, в области, около  $\tilde{k} = \pi n/l$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , соответствующей модам, выживающим в закрытом маленьком резонаторе (выделена на рисунке цветом), мы наблюдаем сгущение волновых чисел. Также, с ростом длины большого резонатора наблюдается уменьшение межмодового интервала. Если мы устремим  $L \rightarrow \infty$ , то получим бесконечно малое межмодовое расстояние, что позволит нам в дальнейшем перейти от дискретной задачи к непрерывной.

### 2.3 Квантование электромагнитного поля

Перейдём к квантованию электромагнитного поля внутри резонатора. Для начала будем рассматривать дискретную задачу. Поле, разложенное по собственным функциям, являющимся бегущими волнами с учётом нормировки

$$E(z) = -i \sum_k \left( \frac{\hbar \omega_k}{2\varepsilon_0} \right)^{1/2} c_k \psi_k(z) + \text{э.с.}, \quad (47)$$

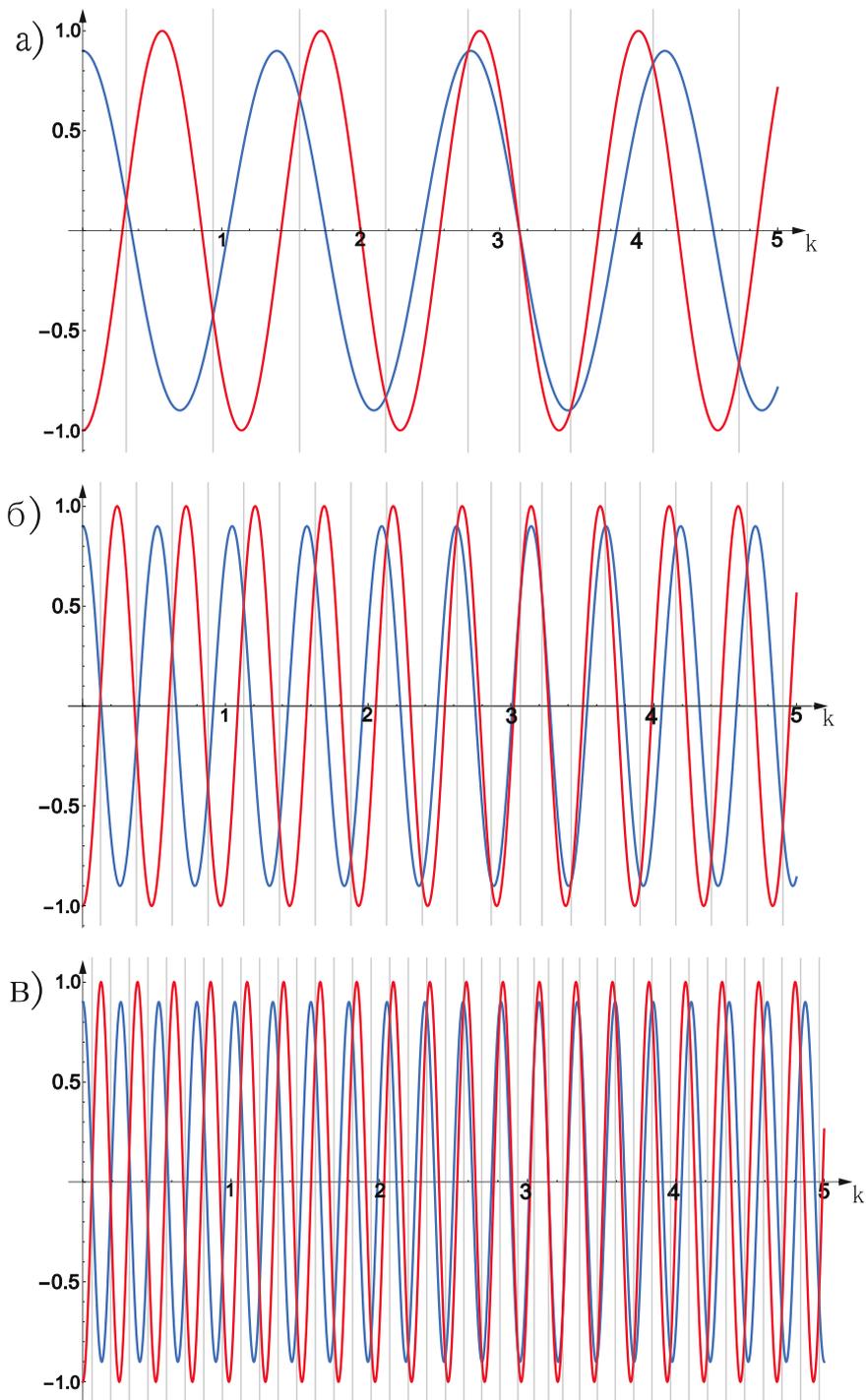


Рис. 4: Решения уравнения (46) для соотношений между длинами резонатора а)  $l=1, L=10$ ; б)  $l=1, L=25$ ; в)  $l=1, L=50$

Суммирование производится по набору волновых векторов, удовлетворяющих решению уравнения (46). Как было отмечено выше, при устремлении длины большого резонатора к бесконечности, межмодовый интервал уменьшается и мы можем рассматривать непре-

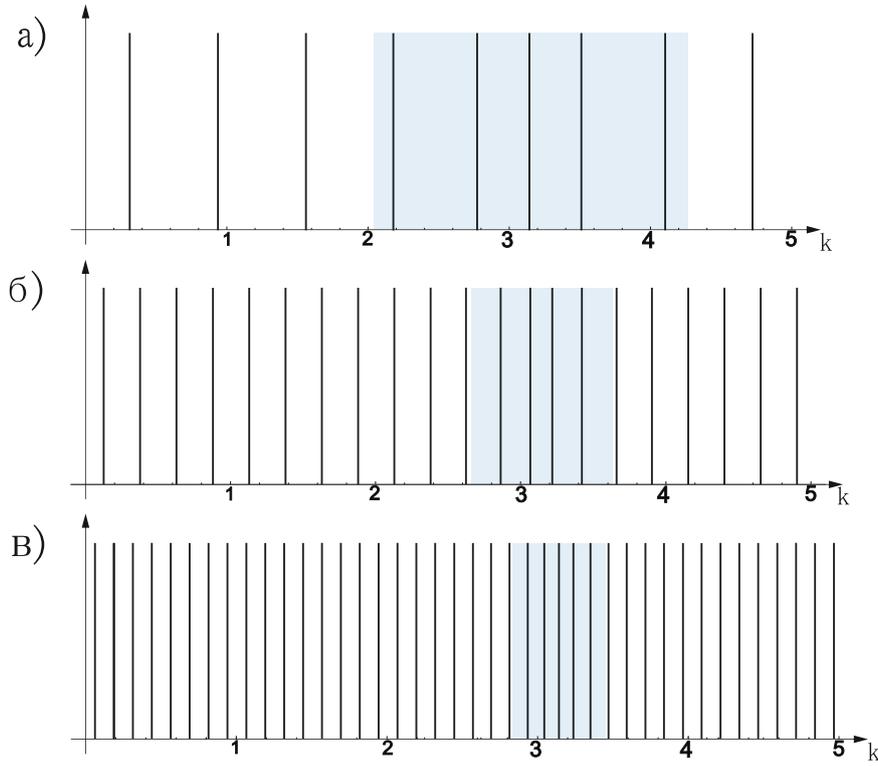


Рис. 5: Допустимые значения  $k$  для резонаторов с соотношением длин Решения уравнения (46) для соотношений между длинами резонатора а)  $l=1, L=10$ ; б)  $l=1, L=25$ ; в)  $l=1, L=50$

рывный спектр и перейти от суммирования к интегрированию. Тогда

$$E(z) = -i \int dk \left( \frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0} \right)^{1/2} l^{1/2} c_k \psi_k(z) + \text{э.с.} \quad (48)$$

От классического случая перейдём к квантовому заменив  $E(z)$  на оператор напряженности электрического поля  $\hat{E}(z)$ , а коэффициенты  $c_k$  на операторы уничтожения для бегущих волн  $\hat{c}_k$ , удовлетворяющие коммутационным соотношениям  $[c_k, c_{k'}^\dagger] = \delta(k - k')$ .

Введём обозначение  $\tilde{\psi}(z) = V^{-1/2} e^{ikz}$ . В дальнейшем мы будем рассматривать одномодовую задачу, в которой маленький резонатор поддерживает выделенную моду с частотой  $\omega = kc$ . Принимая во внимание взаимодействие с зеркалом, мы должны учитывать не только выделенную моду, но и некоторую область  $\Delta k \ll l^{-1}$ , выбранную таким образом для того, чтобы не затронуть соседнюю моду. Учитывая сказанное выше, оператор электрического поля

$$\hat{E}(z) = -i \int dk \left( \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0} \right)^{1/2} l^{1/2} c_k f_k \tilde{\psi}(z) + \text{э.с.} \quad (49)$$

Введём оператор уничтожения для бегущих волн в резонаторе

$$\hat{a} = \left( \frac{l}{2\pi} \right)^{1/2} \int dk c_k f_k, \quad (50)$$

тогда

$$\hat{E}(z) = -i \left( \frac{\pi \hbar \omega}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \hat{a} \tilde{\psi}(z) + \text{э.с.} \quad (51)$$

Обмен излучением приводит к возбуждению и затуханию волн. Перейдём к рассмотрению задачи с временной зависимостью  $\hat{a} \rightarrow \hat{a}(t)$ ,  $\hat{c}_k \rightarrow \hat{c}_k e^{-i\omega t}$ .

Вернёмся к рассмотрению системы уравнений (39). Так как мы считаем, что со стороны бесконечно большого резонатора приходят плоские волны, то мы можем принять  $\psi_k^{(out)}(x) = V^{-1/2} e^{ikz}$ , тогда функции  $f_k = 1$ , следовательно  $f_k = \frac{i\tau}{1+\rho e^{ikl}}$ . Оператор уничтожения для бегущих волн переписется в виде.

$$\hat{a}(t) = \left( \frac{l}{2\pi} \right)^{1/2} \int dk c_k \frac{i\tau e^{-i\omega t}}{1+\rho e^{ikl}}. \quad (52)$$

Заметим, что функции  $f_k$  имеет полюса первого порядка по  $\tilde{k} = \pi n/l$ ,  $n \in Z$ . Экспонента, разложенная в ряд около точки  $\tilde{k}$  примет вид  $e^{ikl} \approx -1(1+i(k-\tilde{k})l)$ .

Сосчитаем теперь коммутатор операторов рождения и уничтожения для разных моментов времени, вычислив интеграл по вычетам функции

$$\begin{aligned} [a(t), a^\dagger(t')] &= \left[ \left( \frac{l}{2\pi} \right)^{1/2} \int dk c_k \frac{i\tau e^{-i\omega t}}{1-\rho(1+i(k-\tilde{k})l)}, \left( \frac{l}{2\pi} \right)^{1/2} \int dk' c_{k'}^\dagger \frac{-i\tau e^{i\omega t'}}{1-\rho(1-i(k'-\tilde{k})l)} \right] = \\ &= \frac{l\tau^2}{2\pi} \int \int dk dk' [c_k, c_{k'}^\dagger] \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{(1-\rho(1+i(k-\tilde{k})l))(1-\rho(1-i(k'-\tilde{k})l))} = \\ &= \frac{\tau^2}{2\pi l} \int \int dk dk' \delta(k-k') \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\left(\frac{C_{\tilde{k}}}{2c} - i\rho(k-\tilde{k})\right)\left(\frac{C_{\tilde{k}}}{2c} + i\rho(k'-\tilde{k})\right)} = \\ &= \frac{(1-\rho^2)c}{2\pi l} \int d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\left(\frac{C_{\tilde{k}}}{2} - i\rho(\omega-\omega_k)\right)\left(\frac{C_{\tilde{k}}}{2} + i\rho(\omega-\omega_k)\right)} = \frac{1+\rho}{2\rho} e^{-i\omega(t-t') - \frac{C_{\tilde{k}}}{2}|t-t'|}. \end{aligned} \quad (53)$$

Здесь введены  $C_{\tilde{k}} = 2c(1-\rho)/l$ , которые имеют смысл обратного времени затухания энергии поля, и учтено, что  $\omega = kc$ . Напомним, что мы рассматриваем случай, когда  $\rho \approx 1$ , тогда мы получим

$$[a(t), a^\dagger(t')] = e^{-i\omega(t-t') - \frac{C_{\tilde{k}}}{2}|t-t'|}. \quad (54)$$

Величины  $C_{\tilde{k}}$  мы уже получали при рассмотрении феноменологического подхода, там они входили явным образом в уравнение для квантового осциллятора с затуханием. Если мы теперь рассмотрим коммутатор

$$[\dot{a}(t), a^\dagger(t')] = -(i\omega + \frac{C_{\tilde{k}}}{2})[a(t), a^\dagger(t')]. \quad (55)$$

Соотношение (55) выполняется в том случае, если

$$\dot{a}(t) = -(i\omega + \frac{C_{\tilde{k}}}{2})a(t) \quad (56)$$

Мы пришли к тем же выражениям, которые были получены при феноменологическом подходе (31). Напомним, что при попытке решить уравнение (56) мы получим нарушение

коммутационных соотношений. Поэтому, так же, как и при феноменологическом подходе мы должны учитывать в системе ланжевеновские шумы.

## **Заключение**

В данной работе были рассмотрены феноменологический и микроскопический подходы к учёту взаимодействия внутрирезонаторного поля с внешними модами. Несмотря на то, что эти подходы принципиально разные, а именно по разному учитывается взаимодействие между модами полей, в ходе решения задач мы получили одинаковые для обоих случаев уравнения.

Однако при решении оптомеханических задач, в которых рассматривается резонатор с подвижным зеркалом, мы получим существенно различные результаты для данных подходов. При применении микроскопического подхода, как видно из формулы (50), при изменении длины резонатора будут меняться операторы рождения и уничтожения для бегущих волн в резонаторе.

# Литература

- [1] Nielsen M. A., Chuang I. L. Quantum Computation and Quantum Information (2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press. (2010)
- [2] K. Hammerer, A.S. Sorensen and E.S. Polzik. Quantum interface between light and atomic ensembles // Rev. Mod. Phys. 82, 1041 (2010)
- [3] Vetlugin, A. N., Sokolov, I. V. Multivariate quantum memory as controllable delayed multi-port beamsplitter // Europhysics Letters, 113(6), 64005 (2016)
- [4] Kimble H. J. Quantum Internet // Nature 453, 1023–1030 (2008)
- [5] M. Hennrich, T. Legero, A. Kuhn, G. Rempe, Vacuum-stimulated Raman scattering based on adiabatic passage in a high-nesse optical cavity // Physical Review Letters. 85, 48724875 (2000).
- [6] A. Stute, B. Casabone, P. Schindler, T. Monz, P. O. Schmidt, B. Brandstatter, T. E. Northup, and R. Blatt. Tunable Ion-Photon Entanglement in an Optical Cavity // Nature 485, 482485 (2012).
- [7] Jing, B. et al. Entanglement of three quantum memories via interference of three single photons // Nature Photonics 13, 210213 (2019).
- [8] Borregaard, J. et al. Scalable photonic network architecture based on motional averaging in room temperature gas // Nature Communications 7, (2016).
- [9] D. A. Steck, Quantum and Atom Optics, available online at <http://steck.us/teaching> (revision 0.11.6, 2017).

## Приложение А

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} E_1^{(+)}(t + \tau_{rt1})e^{-i\omega_1(t+\tau_{rt1})} &= r_{12}E_1^{(+)}(t)e^{-i\omega_1 t} + t_{21}E_2^{(+)}(t)e^{-i\omega_2 t}, \\ E_2^{(+)}(t + \tau_{rt2})e^{-i\omega_2(t+\tau_{rt2})} &= r_{21}E_2^{(+)}(t)e^{-i\omega_2 t} + t_{12}E_1^{(+)}(t)e^{-i\omega_1 t}. \end{aligned} \quad (1)$$

Так как мы считаем резонатор хорошим и предполагаем, что  $|r| = 1$ , то электрическое поле  $E^{(+)}(t + \tau_{rt}) \approx E^{(+)}(t) + \tau_{rt}\dot{E}^{(+)}(t)$ . Это справедливо для полей в обоих резонаторах. Тогда система (1) переписывается в виде

$$\begin{aligned} (E_1^{(+)}(t) + \tau_{rt1}\dot{E}_1^{(+)}(t))e^{-i\omega_1(t+\tau_{rt1})} &= r_{12}E_1^{(+)}(t)e^{-i\omega_1 t} + t_{21}E_2^{(+)}(t)e^{-i\omega_2 t}, \\ (E_2^{(+)}(t) + \tau_{rt2}\dot{E}_2^{(+)}(t))e^{-i\omega_2(t+\tau_{rt2})} &= r_{21}E_2^{(+)}(t)e^{-i\omega_2 t} + t_{12}E_1^{(+)}(t)e^{-i\omega_1 t}. \end{aligned} \quad (2)$$

Легко увидеть, что система преобразуется в

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} E_1^{(+)} \\ E_2^{(+)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_{12}e^{i\omega_1\tau_{rt1}} - 1}{\tau_{rt1}} & \frac{t_{21}e^{-i\Delta t}e^{i\omega_1\tau_{rt1}}}{\tau_{rt1}} \\ \frac{t_{12}e^{i\Delta t}e^{i\omega_2\tau_{rt2}}}{\tau_{rt2}} & \frac{r_{21}e^{i\omega_2\tau_{rt2}} - 1}{\tau_{rt2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1^{(+)} \\ E_2^{(+)} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Так как  $\tau_{rti}$  - время обхода резонатора, а  $\omega_i$  - собственная частота соответствующего резонатора, то  $i\omega_i\tau_{rti} = 2\pi n$ . Поэтому, с учётом последнего соотношения мы можем записать систему в виде

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} E_1^{(+)} \\ E_2^{(+)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_{12}e^{i\omega_1\tau_{rt1}} - 1}{\tau_{rt1}} & \frac{t_{21}e^{-i\Delta t}}{\tau_{rt1}} \\ \frac{t_{12}e^{i\Delta t}}{\tau_{rt2}} & \frac{r_{21}e^{i\omega_2\tau_{rt2}} - 1}{\tau_{rt2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1^{(+)} \\ E_2^{(+)} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

## Приложение В

Докажем полноту и ортогональность в одномерном случае системы функций  $\psi_k(r) = V^{-1/2} e^{ikr} f_k(r)$ . Функции являются ортогональными, если

$$(\psi_k(r), \psi_{k'}(r)) = s^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (f_k(r))^* f_{k'}(r) e^{-ikr} e^{ik'r} dr. \quad (1)$$

Так как мы знаем, что функции  $f_k(r)$  не зависят от  $r$ , то мы их можем вынести за знак интеграла. И останется взять интеграл такого вида

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikr} e^{ik'r} dr &= [k' - k = p, \varepsilon \rightarrow 0] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipr - \varepsilon|r|} dr = \int_{-\infty}^0 e^{ipr + \varepsilon r} dr + \int_0^{\infty} e^{ipr - \varepsilon r} dr = \\ &= \frac{1}{ip + \varepsilon} - \frac{1}{ip - \varepsilon} = \frac{2\varepsilon}{p^2 + \varepsilon^2} \end{aligned} \quad (3)$$

Так как  $\varepsilon \rightarrow 0$  и

$$\frac{2\varepsilon}{p^2 + \varepsilon^2} = \begin{cases} 0 & p \neq 0 \\ \infty & p = 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & k \neq k' \\ \infty & k = k' \end{cases} = \delta(k - k') \quad (4)$$

Ортогональность функций  $\psi_k(r)$  доказана.

Система является полной, если выполнено

$$\sum_k \psi_k^*(r) \psi_k(r') = \delta(r - r'). \quad (5)$$

Домножим на произвольную функцию  $g_{k'}(r)$  и проинтегрируем правую и левую части

$$\sum_k \int \psi_k^*(r) \psi_k(r') g_{k'}(r) dr = \int g_{k'}(r) \delta(r - r') dr, \quad (6)$$

$$\sum_k \int \psi_k^*(r) \psi_k(r') g_{k'}(r) dr = g_{k'}(r'). \quad (7)$$

Пусть

$$\int \psi_k^*(r) g_{k'}(r) dr = \theta_{kk'}. \quad (8)$$

Тогда

$$\sum_k \theta_{kk'} \psi_k(r') = g_{k'}(r'). \quad (9)$$

Пусть теперь  $g_{k'}(r) = \psi_{k'}(r)$ , значит

$$\theta_{kk'} = \int \psi_k^*(r) \psi_{k'}(r) dr = f_k^* f_{k'} \delta_{kk'} \quad (10)$$

$$\sum_k f_k^* f_{k'} \delta_{kk'} \psi_k(r') = \psi_{k'}(r'). \quad (11)$$

$$|f_{k'}|^2 \psi_{k'}(r') = \psi_{k'}(r'). \quad (12)$$

Значит  $|f_{k'}|^2 = 1$ . Система функций полна и ортонормированна.