Санкт-Петербургский
государственный
университет
www.spbu.ru

Автоколебательные системы

Курсовая работа
21 группа
Студент:
Решетников Даниил Дмитриевич
Научный руководитель:
Лосев Александр Сергеевич

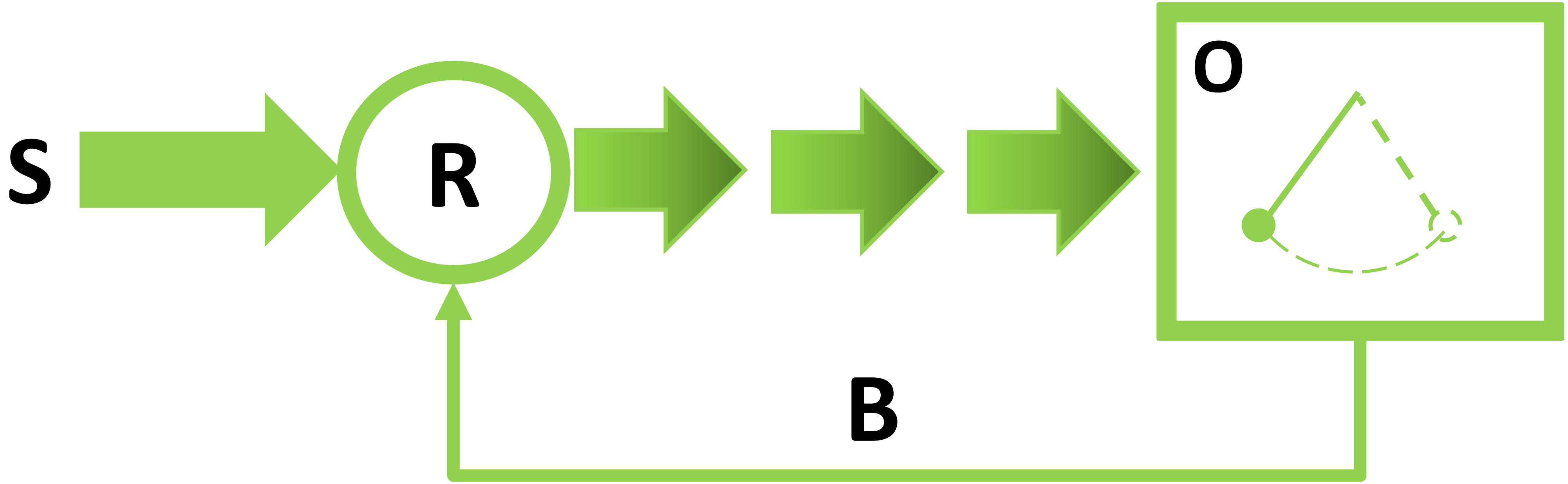
Признаки автоколебательных систем

Наличие обратной связи

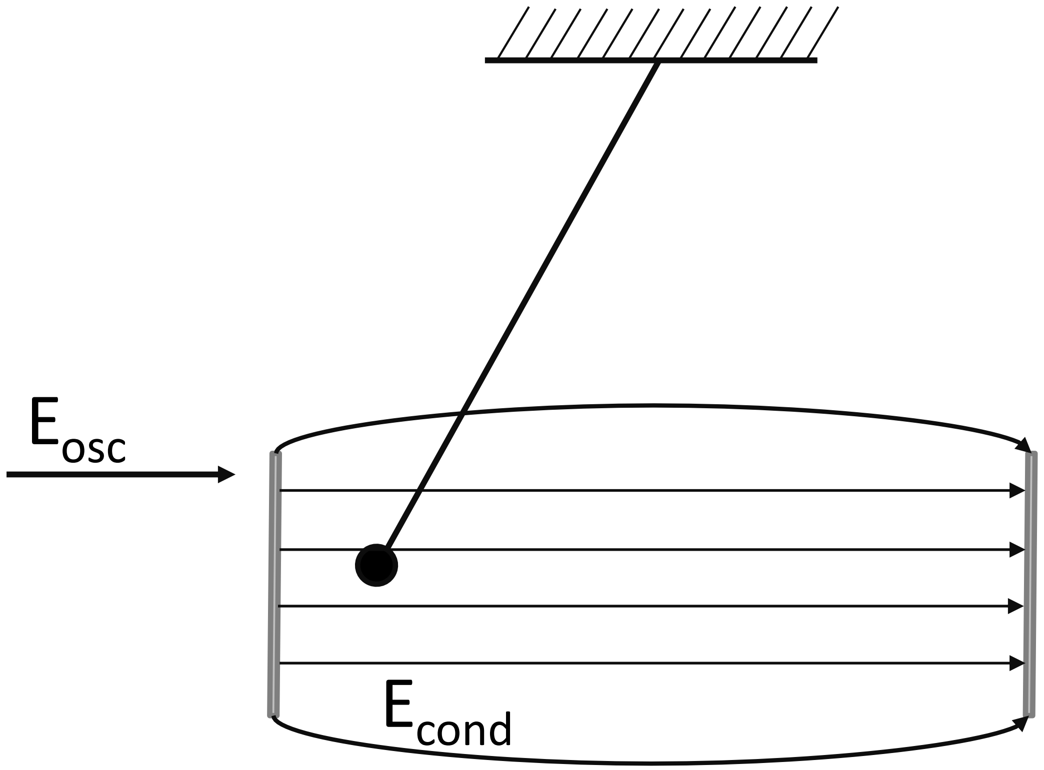
Явление принудительной синхронизации

Незатухающие колебания

Механизм действия



Модель установки



Динамическое уравнение

$$ma = -P_{\text{rest}} - F_{\text{resist}} + E(\dot{\phi}) + A_0 \sin pt, \quad (1)$$

$$F_{\text{resist}} = -\gamma V^2, \quad (2)$$

$$E(\dot{\phi}) = \begin{cases} E_0, \dot{\phi} > 0 \\ -E_0, \dot{\phi} < 0, \end{cases} \quad (3)$$

$$E_0 > 0.$$

$$ml^2\ddot{\phi} + mgl\phi + \gamma\dot{\phi} = E(\dot{\phi}) + A_0 \sin pt \quad (4)$$

Динамическое уравнение

Введем ряд замен:

$$\tau = pt$$

$$k^2 = \frac{g}{l}$$

$$\frac{|k^2 - p^2|}{p^2} = \mu \cdot \Delta, \qquad (5)$$

$$\frac{k^2}{p^2} = \mu \cdot \Delta + 1, \qquad (6)$$

$$\mu = \frac{\gamma}{ml^2p^2}. \qquad (7)$$

$$A_1 = \frac{A_0}{\gamma p}$$

$$E^* = \frac{E}{\gamma p}.$$

Динамическое уравнение

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} + \phi = \mu\left(A_1 \sin\tau - \Delta \cdot \phi - \frac{d\phi}{d\tau} + E^*\left(\frac{d\phi}{d\tau}p\right)\right) \quad (8)$$

Анализ динамического уравнения

$$\phi = a\cos\tau + b\sin\tau. \qquad (9)$$

$$\begin{cases} \frac{da}{d\tau} = -\frac{\mu A_0}{2} - \frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi\left(a\cos\tau + b\sin\tau, -a\sin\tau + b\cos\tau\right)\sin\tau d\tau \\ \frac{db}{s\tau} = \frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi\left(a\cos\tau + b\sin\tau, -a\sin\tau + b\cos\tau\right)\cos\tau d\tau. \end{cases} \qquad (10)$$

Анализ динамического уравнения

$$\frac{da}{d\tau} = -\frac{\mu A_1}{2} - \frac{\mu}{2\pi}\Big(\int_{p\Delta t}^{\pi+p\Delta t}(-\Delta\,(a\cos\tau + b\sin\tau) - (-a\sin\tau + b\cos\tau) + E_0)\sin\tau d\tau +$$
$$+\int_{\pi+p\Delta t}^{2\pi+p\Delta t}(-\Delta\,(a\cos\tau + b\sin\tau) - (-a\sin\tau + b\cos\tau) - E_0)\sin\tau d\tau\Big) =$$
$$= \frac{\mu}{2}\left(-a + \Delta\cdot b - A_1 + \frac{4E_0}{\gamma p\pi}\frac{a\cos(p\delta t) - b\sin(p\delta t)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \tag{11}$$

$$\frac{db}{d\tau} = -\frac{\mu}{2\pi}\Big(\int_{p\Delta t}^{\pi+p\Delta t}(-\Delta\,(a\cos\tau + b\sin\tau) - (-a\sin\tau + b\cos\tau) + E_0)\sin\tau d\tau +$$
$$+\int_{\pi+p\Delta t}^{2\pi+p\Delta t}(-\Delta\,(a\cos\tau + b\sin\tau) - (-a\sin\tau + b\cos\tau) - E_0)\sin\tau d\tau\Big) =$$
$$= \frac{\mu}{2}\left(-b - \Delta\cdot a - A_1 + \frac{4E_0}{\gamma p\pi}\frac{a\sin(p\delta t) + b\cos(p\delta t)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \tag{12}$$

Анализ динамического уравнения

$$\Omega = p\delta t,$$
$$x = \frac{a\gamma p\pi}{4E_0},$$
$$y = \frac{b\gamma p\pi}{4E_0},$$
$$A = \frac{A_1\gamma p\pi}{4E_0},$$
$$\tau_1 = \frac{2\tau}{\mu}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau_1} = -x + \Delta \cdot y - A\frac{x\cos\Omega - y\sin\Omega}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{dy}{d\tau_1} = -y - \Delta \cdot x + \frac{x\sin\Omega + y\cos\Omega}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases} \qquad (13)$$

Анализ динамического уравнения

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{d\tau_1} = -\rho - A\cos\theta + \cos\Omega = P(\rho,\theta), \\ \rho\frac{d\theta}{d\tau_1} = -\Delta\cdot\rho + A\sin\theta + \sin\Omega = \rho Q(\rho,\theta). \end{cases} \qquad (14)$$

Исследование динамической системы на устойчивость

$$\begin{cases} P(\rho,\theta) = 0 \\ \rho Q(\rho,\theta) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} -\rho - A\cos\theta + \cos\Omega = 0, \\ -\Delta\cdot\rho + A\sin\theta + \sin\Omega = 0. \end{cases} \quad (16)$$

$$\rho^2(1+\Delta^2) - 2\rho(\cos\Omega + \Delta\sin\Omega) + 1 = A^2 \quad (17)$$

Исследование динамической системы на устойчивость

$$s^2 + ps + q = 0, \tag{18}$$

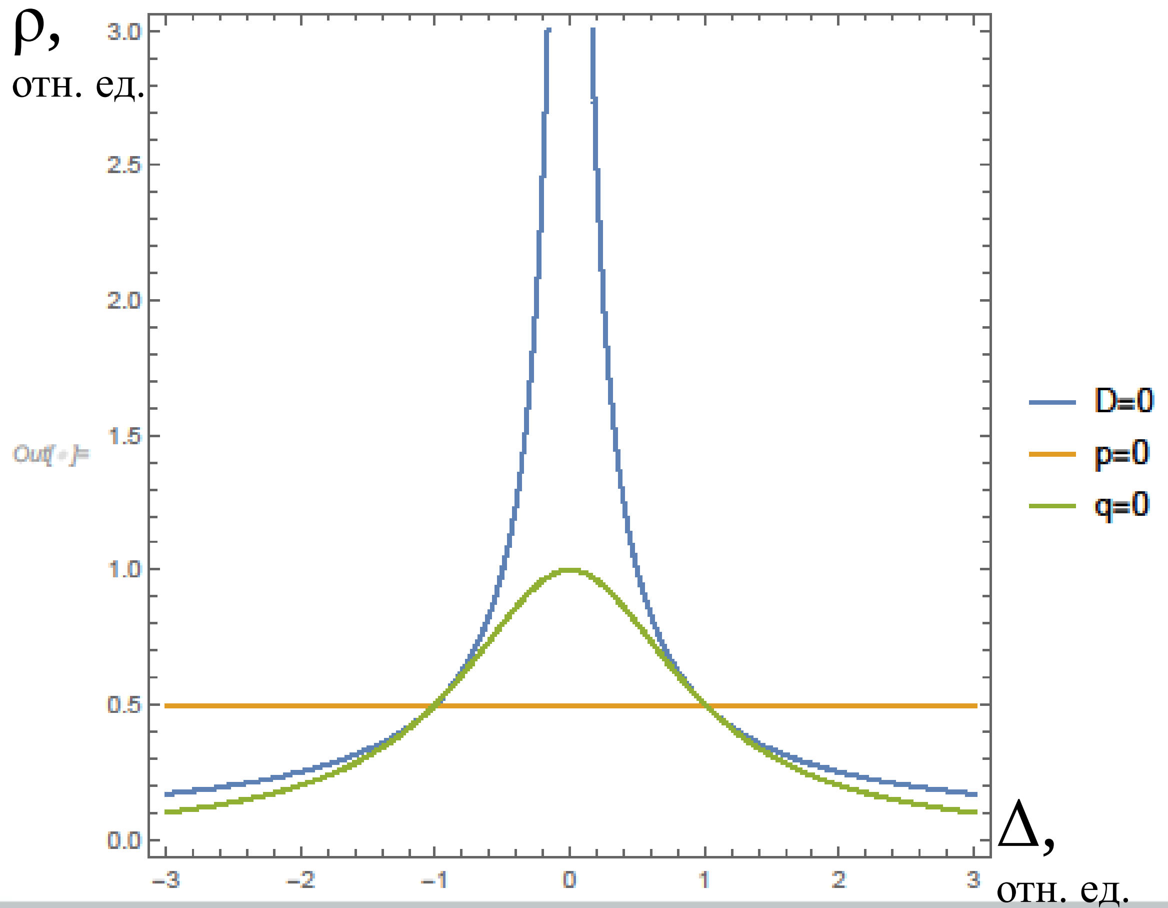
$$p = -\left(\dot{P}_\rho(\rho,\theta) + \dot{Q}_\theta(\rho,\theta)\right) = 2 - \frac{\cos\Omega}{\rho} \tag{19}$$

$$q = \dot{P}_\rho(\rho,\theta)\dot{Q}_\theta(\rho,\theta) - \dot{P}_\theta(\rho,\theta)\dot{Q}_\rho(\rho,\theta) = 1 + \Delta^2 - \frac{1}{\rho}(\cos\Omega + \Delta\sin\Omega) \tag{20}$$

$$D = p^2 - 4q = \frac{1}{p^2} - \left(2\Delta - \frac{\sin\Omega}{\rho}\right)^2 \tag{21}$$

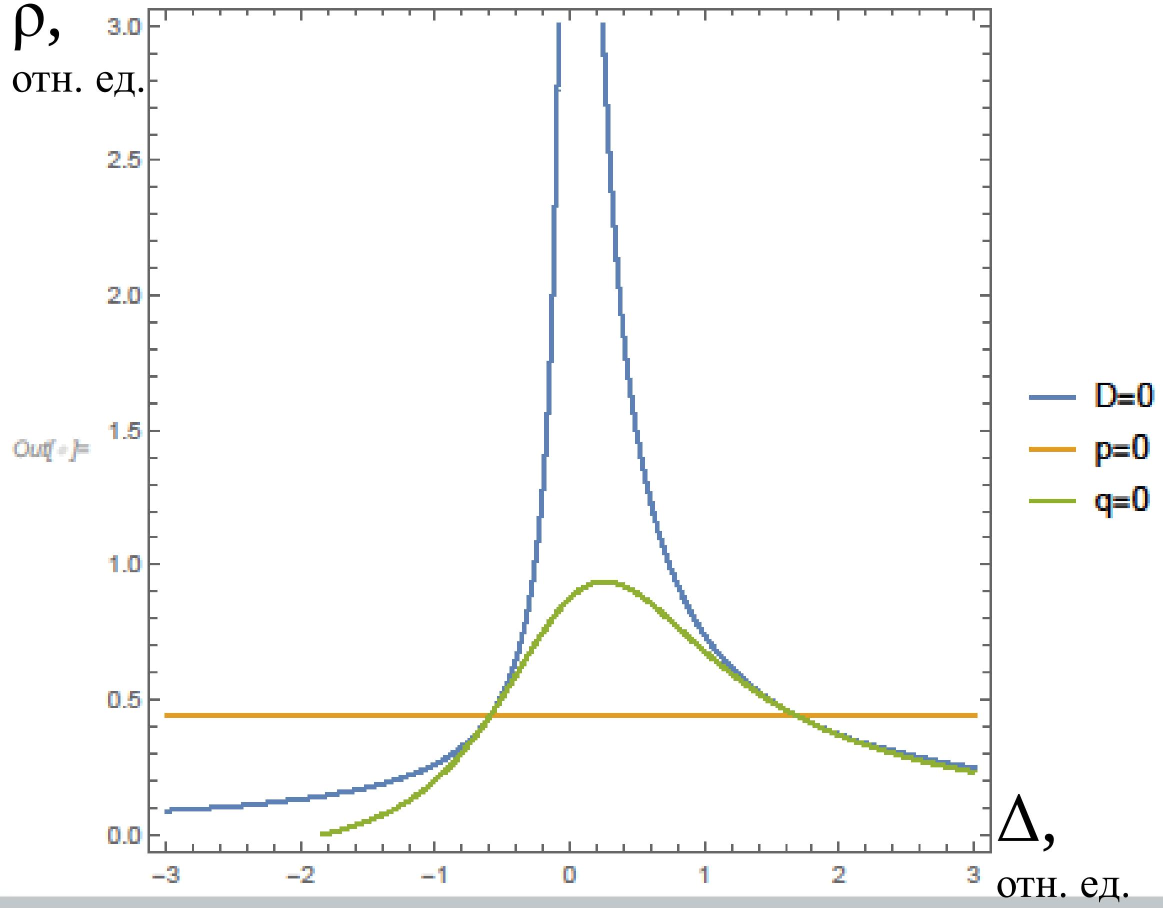
Исследование динамической системы на устойчивость

Ω=0



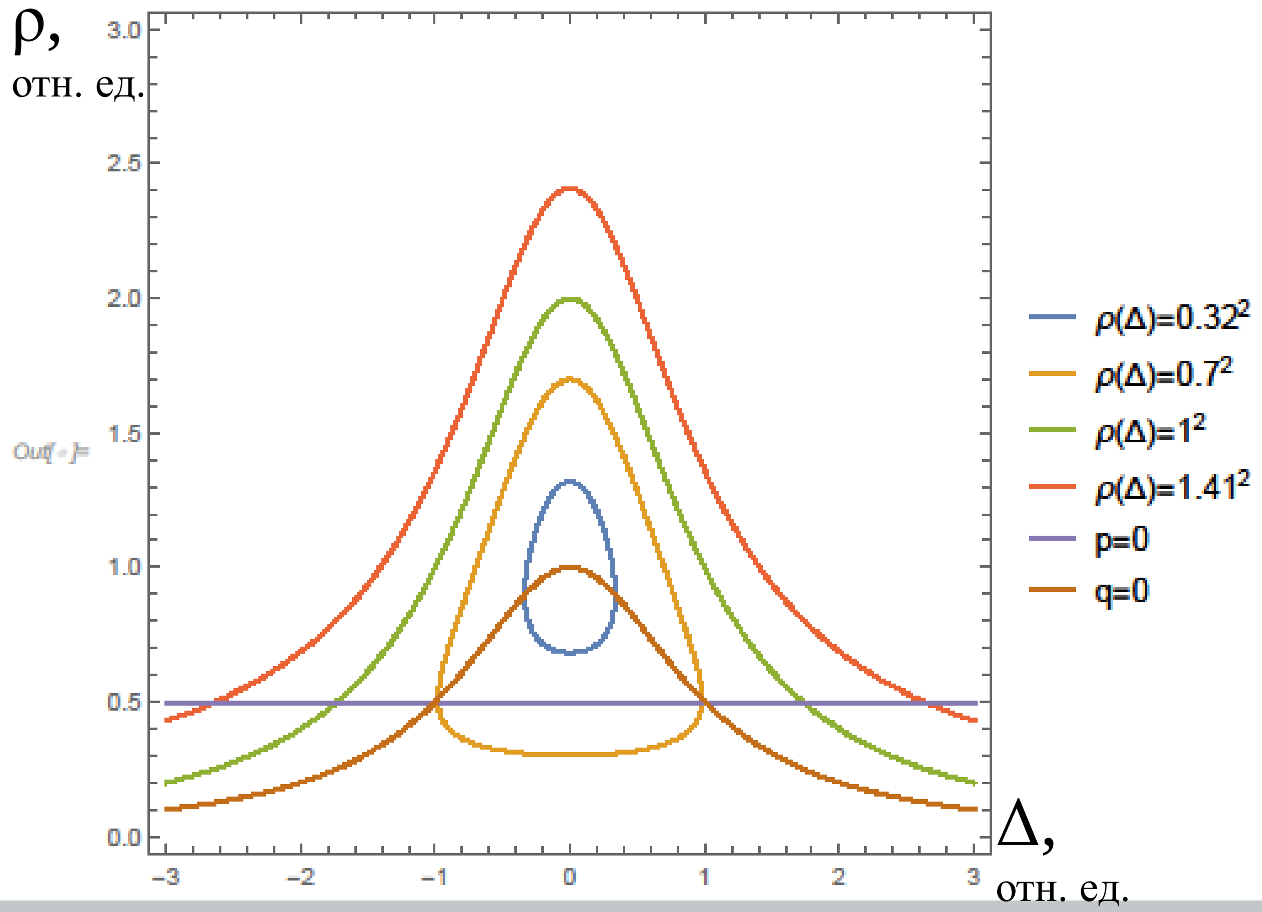
Исследование динамической системы на устойчивость

Ω=0.5



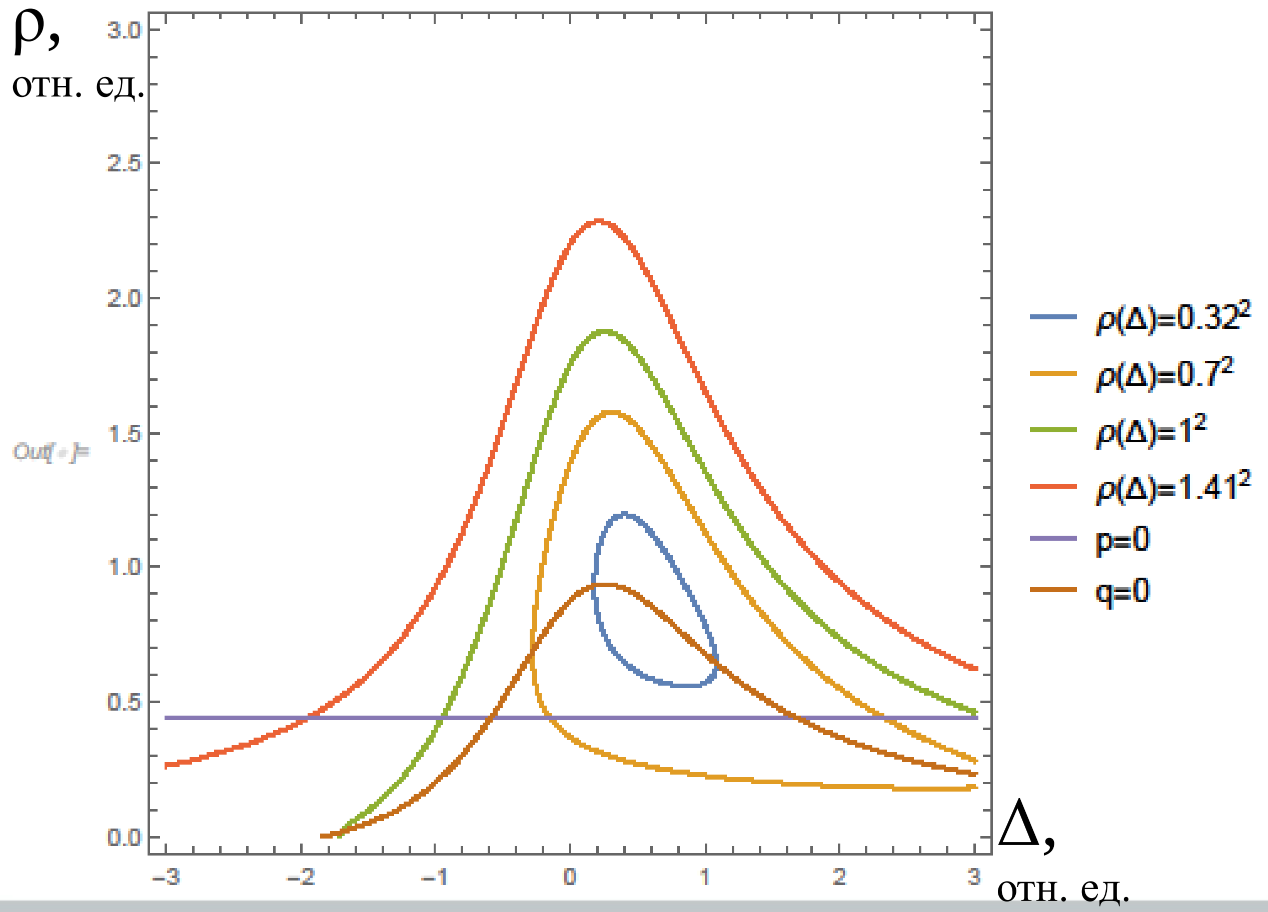
Исследование динамической системы на устойчивость

Ω=0



Исследование динамической системы на устойчивость

Ω=0.5



Исследование динамической системы на устойчивость

$A_1^2 = \frac{1}{2}(1 - \sin\Omega) \qquad A_2^2 = \frac{1}{2}(1 + \sin\Omega)$

- при $A^2 > A_2^2$ захватывание имеет место для Δ, удовлетворяющих неравенству:

$$\frac{2\sin\Omega - \sqrt{4A^2 - \cos^2\Omega}}{\cos\Omega} < \Delta < \frac{2\sin\Omega + \sqrt{4A^2 - \cos^2\Omega}}{\cos\Omega};$$

- при $A_1^2 < A^2 < A_2^2$ захватывание имеет место для

$$\frac{\cos\Omega\sin\Omega - \sqrt{A^2 - A^4}}{\cos^2\Omega - A^2} < \Delta < \frac{2\sin\Omega + \sqrt{4A^2 - \cos^2\Omega}}{\cos\Omega};$$

- и, наконец, для $0 < A^2 < A_1^2$ захватывание произойдет при

$$\frac{\cos\Omega\sin\Omega - \sqrt{A^2 - A^4}}{\cos^2\Omega - A^2} < \Delta < \frac{\cos\Omega\sin\Omega + \sqrt{A^2 - A^4}}{\cos^2\Omega - A^2}.$$