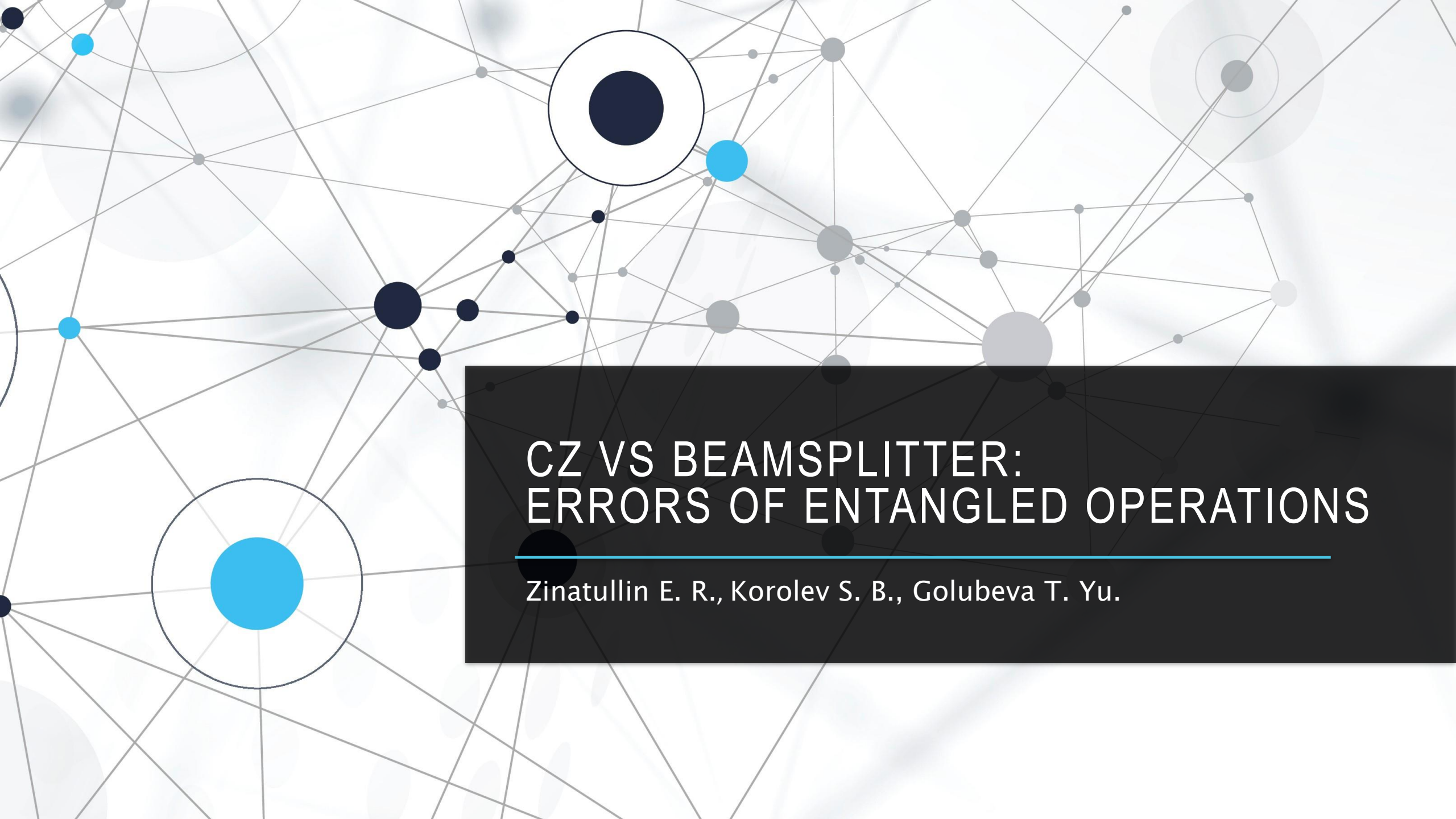


The background of the slide features a complex, abstract network diagram. It consists of numerous nodes of varying sizes and colors (dark blue, light blue, and grey) interconnected by a web of thin, light grey lines. Some nodes are highlighted with larger, concentric circles. The overall aesthetic is technical and modern, suggesting a theme of quantum entanglement or network theory.

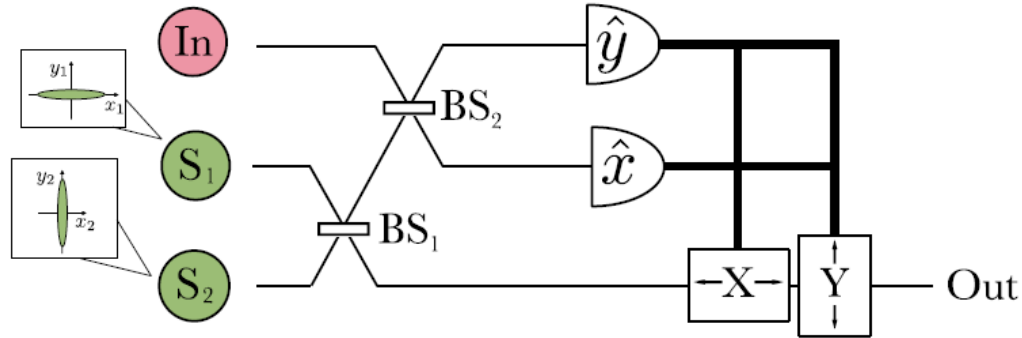
CZ VS BEAMSPLITTER: ERRORS OF ENTANGLED OPERATIONS

Zinatullin E. R., Korolev S. B., Golubeva T. Yu.

МОТИВАЦИЯ

- Квантовые вычисления в непрерывных переменных – хотим уменьшить «неустранимые» ошибки;
- Уменьшение ошибок путем использования негауссовых операций;
- Можно ли добиться чего-то лучшего с гауссовыми системами;
- Весовые коэффициенты – их смысл;
- Телепортация как тестовая схема.

ПРОТОКОЛ ТЕЛЕПОРТАЦИИ И ЕГО МОДИФИКАЦИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ CZ



«Классическая» схема телепортации

На входе:

$$\hat{x}_{s,1} = e^r \hat{x}_{0,1}, \quad \hat{y}_{s,1} = e^{-r} \hat{y}_{0,1}$$

$$\hat{x}_{s,2} = e^{-r} \hat{x}_{0,2}, \quad \hat{y}_{s,2} = e^r \hat{y}_{0,2},$$

После смешения на первом светоделителе:

$$\hat{a}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} ((\hat{x}_{s,1} + \hat{x}_{s,2}) + i(\hat{y}_{s,1} + \hat{y}_{s,2})),$$

$$\hat{a}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} ((\hat{x}_{s,1} - \hat{x}_{s,2}) + i(\hat{y}_{s,1} - \hat{y}_{s,2})).$$

После смешения на втором светоделителе:

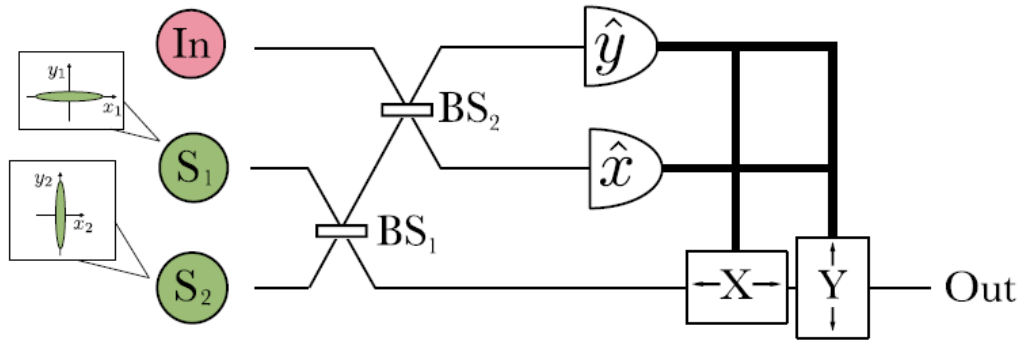
$$\hat{a}'_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left(\hat{x}_{in} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x}_{s,1} + \hat{x}_{s,2}) \right) + i \left(\hat{y}_{in} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{y}_{s,1} + \hat{y}_{s,2}) \right) \right),$$

$$\hat{a}''_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left(\hat{x}_{in} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x}_{s,1} + \hat{x}_{s,2}) \right) + i \left(\hat{y}_{in} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{y}_{s,1} + \hat{y}_{s,2}) \right) \right).$$

Гомодинное детектирование:

$$\begin{cases} \hat{i}_{in,y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \left(\hat{y}_{in} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{y}_{s,1} + \hat{y}_{s,2}) \right) \\ \hat{i}_{1,x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \left(\hat{x}_{in} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x}_{s,1} + \hat{x}_{s,2}) \right) \end{cases}$$

ПРОТОКОЛ ТЕЛЕПОРТАЦИИ И ЕГО МОДИФИКАЦИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ CZ



«Классическая» схема телепортации

Изменение квадратурных компонент поля во втором канале:

$$\hat{x}'_2 = \hat{x}_{in} - \sqrt{2}\hat{x}_{s,2} - \sqrt{2}i_{1,x}/\beta,$$

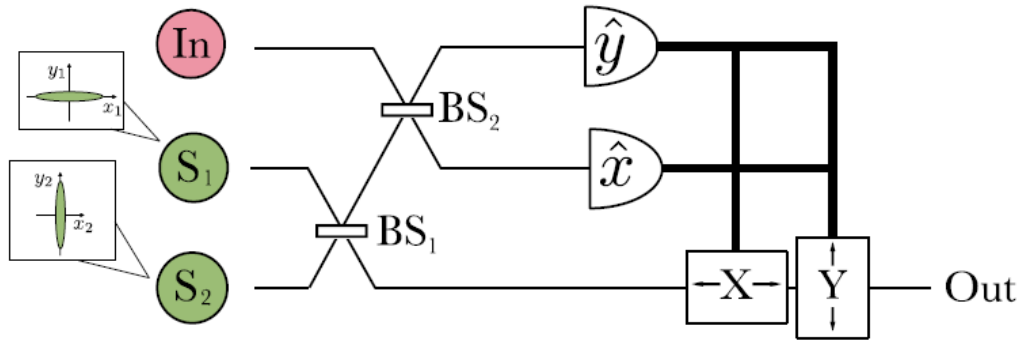
$$\hat{y}'_2 = \hat{y}_{in} + \sqrt{2}\hat{y}_{s,1} - \sqrt{2}i_{in,y}/\beta.$$

На выходе:

$$\hat{x}_{out} = \hat{x}_{in} - \sqrt{2}\hat{x}_{s,2} = \hat{x}_{in} - \sqrt{2}e^{-r}\hat{x}_{0,2},$$

$$\hat{y}_{out} = \hat{y}_{in} + \sqrt{2}\hat{y}_{s,1} = \hat{y}_{in} + \sqrt{2}e^{-r}\hat{y}_{0,1},$$

ПРОТОКОЛ ТЕЛЕПОРТАЦИИ И ЕГО МОДИФИКАЦИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ CZ



«Классическая» схема телепортации

Изменение квадратурных компонент поля во втором канале:

$$\hat{x}'_2 = \hat{x}_{in} - \sqrt{2}\hat{x}_{s,2} - \sqrt{2}i_{1,x}/\beta,$$

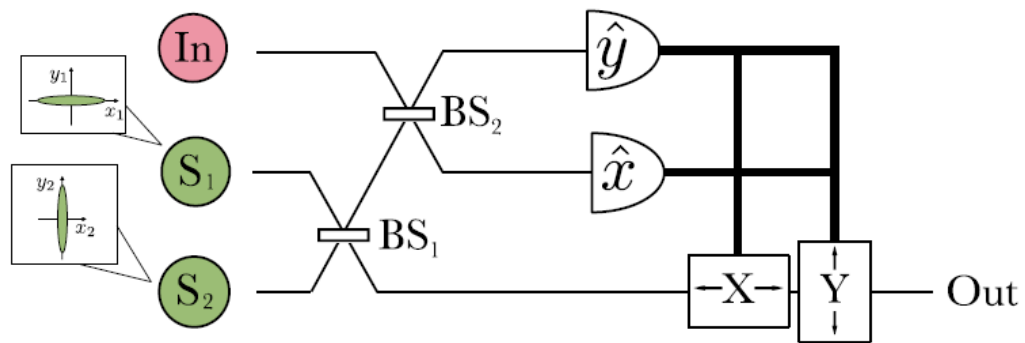
$$\hat{y}'_2 = \hat{y}_{in} + \sqrt{2}\hat{y}_{s,1} - \sqrt{2}i_{in,y}/\beta.$$

На выходе:

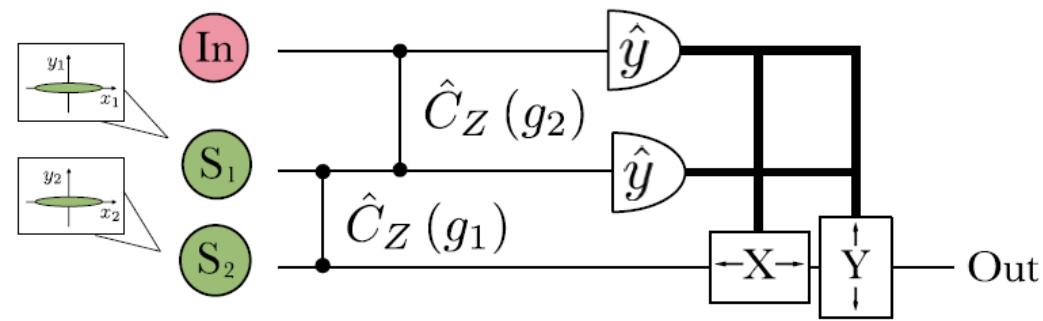
$$\hat{x}_{out} = \hat{x}_{in} - \sqrt{2}\hat{x}_{s,2} = \hat{x}_{in} - \sqrt{2}e^{-r}\hat{x}_{0,2},$$

$$\hat{y}_{out} = \hat{y}_{in} + \sqrt{2}\hat{y}_{s,1} = \hat{y}_{in} + \sqrt{2}e^{-r}\hat{y}_{0,1},$$

ПРОТОКОЛ ТЕЛЕПОРТАЦИИ И ЕГО МОДИФИКАЦИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ CZ



«Классическая» схема телепортации



Заменяем светоделители на гейты CZ:

$$\hat{C}_{Z,jk} = e^{2ig_{jk}\hat{x}_j\hat{x}_k}$$

g_{jk} – весовые коэффициенты.

ПРОТОКОЛ ТЕЛЕПОРТАЦИИ И ЕГО МОДИФИКАЦИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ CZ

На входе:

$$\hat{x}_{s,1} = e^r \hat{x}_{0,1}, \quad \hat{y}_{s,1} = e^{-r} \hat{y}_{0,1},$$

$$\hat{x}_{s,2} = e^r \hat{x}_{0,2}, \quad \hat{y}_{s,2} = e^{-r} \hat{y}_{0,2},$$

После первого преобразования CZ:

$$\hat{a}'_1 = \hat{x}_{s,1} + i (\hat{y}_{s,1} + g_1 \hat{x}_{s,2}),$$

$$\hat{a}'_2 = \hat{x}_{s,2} + i (\hat{y}_{s,2} + g_1 \hat{x}_{s,1}).$$

После второго преобразования CZ:

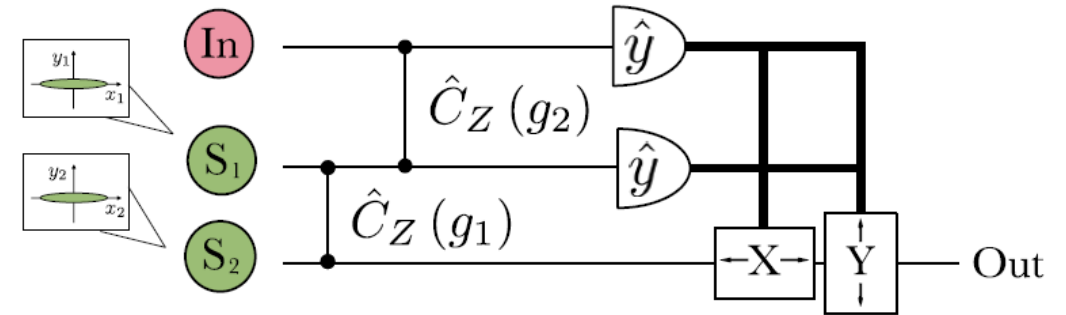
$$\hat{a}'_{in} = \hat{x}_{in} + i (\hat{y}_{in} + g_2 \hat{x}_{s,1})$$

$$\hat{a}''_1 = \hat{x}_{s,1} + i (\hat{y}_{s,1} + g_1 \hat{x}_{s,2} + \hat{g}_2 \hat{x}_{in}),$$

$$\hat{a}'_2 = \hat{x}_{s,2} + i (\hat{y}_{s,2} + g_1 \hat{x}_{s,1}).$$

Гомодинное детектирование:

$$\begin{cases} \hat{i}_{y,in} = \hat{y}_{in} + g_2 \hat{x}_{s,1} \\ \hat{i}_{y,1} = \hat{y}_{s,1} + g_1 \hat{x}_{s,2} + g_2 \hat{x}_{in} \end{cases}$$



Заменяем светоделители на гейты CZ:

$$\hat{C}_{Z,jk} = e^{2ig_{jk}\hat{x}_j\hat{x}_k}$$

g_{jk} – весовые коэффициенты.

ПРОТОКОЛ ТЕЛЕПОРТАЦИИ И ЕГО МОДИФИКАЦИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ CZ

На выходе:

$$\hat{x}_{out} = -\frac{g_2}{g_1}\hat{x}_{in} - \frac{1}{g_1}\hat{y}_{s,1} = -\frac{g_2}{g_1}\hat{x}_{in} - \frac{1}{g_1}e^{-r}\hat{y}_{0,1},$$

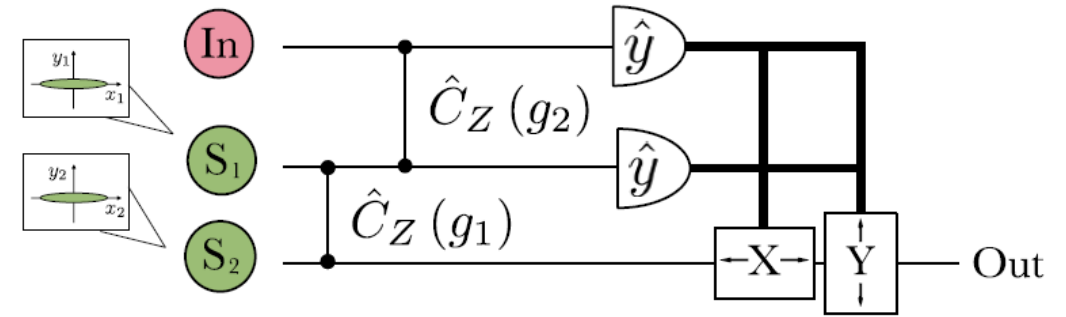
$$\hat{y}_{out} = -\frac{g_1}{g_2}\hat{y}_{in} + \hat{y}_{s,2} = -\frac{g_1}{g_2}\hat{y}_{in} + e^{-r}\hat{y}_{0,2}.$$

телепортация $\rightarrow g_1 = -g_2$

Тогда,

$$\hat{x}_{out} = \hat{x}_{in} - \frac{1}{g_1}e^{-r}\hat{y}_{0,1},$$

$$\hat{y}_{out} = \hat{y}_{in} + e^{-r}\hat{y}_{0,2}.$$

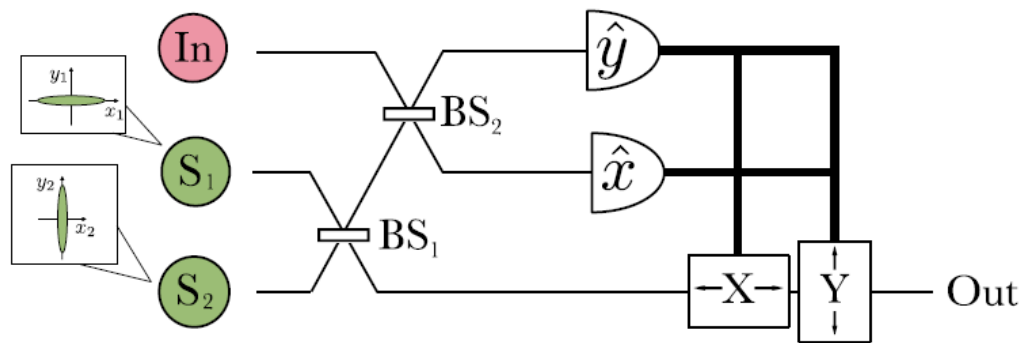


Заменяем светоделители на гейты CZ:

$$\hat{C}_{Z,jk} = e^{2ig_{jk}\hat{x}_j\hat{x}_k}$$

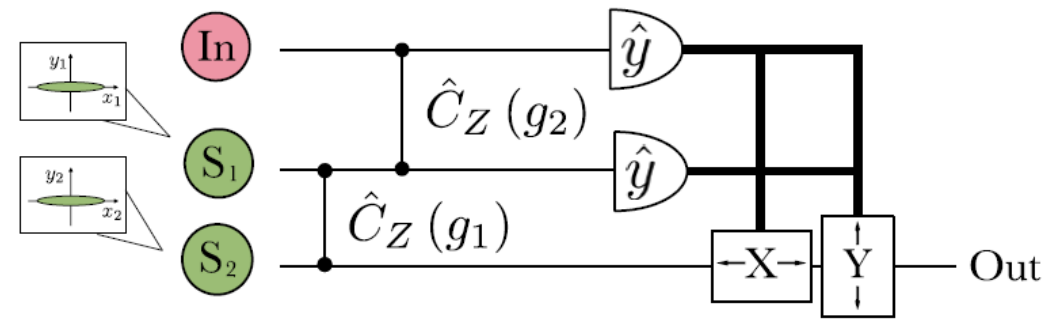
g_{jk} – весовые коэффициенты.

ПРОТОКОЛ ТЕЛЕПОРТАЦИИ И ЕГО МОДИФИКАЦИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ CZ



$$\hat{x}_{out} = \hat{x}_{in} - \sqrt{2}e^{-r}\hat{x}_{0,2},$$

$$\hat{y}_{out} = \hat{y}_{in} + \sqrt{2}e^{-r}\hat{y}_{0,1},$$



$$\hat{x}_{out} = \hat{x}_{in} - \frac{1}{g_1}e^{-r}\hat{y}_{0,1},$$

$$\hat{y}_{out} = \hat{y}_{in} + e^{-r}\hat{y}_{0,2}.$$

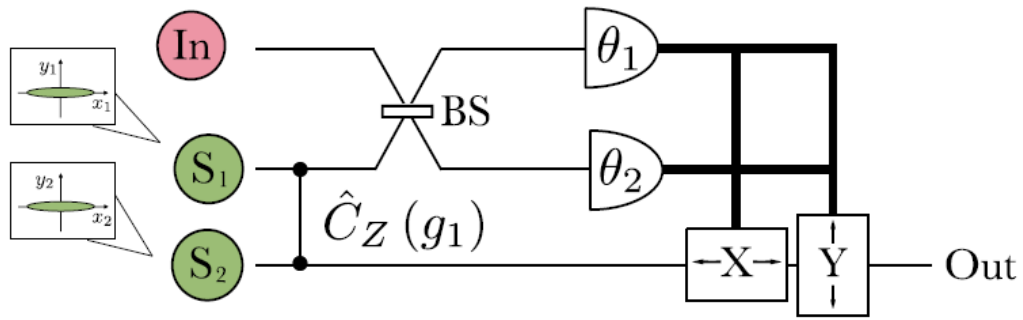
Рассчитаем среднеквадратичные ошибки телепортации:

$$\langle \delta \hat{e}_x^2 \rangle = \langle (\hat{x}_{out} - \hat{x}_{in})^2 \rangle, \quad \langle \delta \hat{e}_y^2 \rangle = \langle (\hat{y}_{out} - \hat{y}_{in})^2 \rangle$$

При $g_1 = -g_2 = 1$ ошибка в схеме телепортации с CZ вдвое меньше, чем ошибка в «классической» схеме телепортации.

При $g_1 = -g_2 \rightarrow \infty$ ошибка в одной из квадратур будет стремиться к 0!

ТЕЛЕПОРТАЦИЯ В СМЕШАННОЙ СХЕМЕ



$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{out} \\ \hat{y}_{out} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin \theta_-} \begin{pmatrix} -\frac{\cos \theta_- + \cos \theta_+}{g_1} & -\frac{\sin \theta_+}{g_1} \\ g_1 \sin \theta_+ & g_1 (\cos \theta_- - \cos \theta_+) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_{s,1}}{g_1} \\ \hat{y}_{s,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{g_1} & \frac{1}{g_1} \\ g_1 & g_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{in} \\ i_1 \end{pmatrix}$$

Для превращения рассматриваемого протокола в схему телепортации необходимо потребовать:

$$\theta_2 = -\theta_1 = \pi/4,$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{out} \\ \hat{y}_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_1} & 0 \\ 0 & g_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_{s,1}}{g_1} \\ \hat{y}_{s,2} \end{pmatrix}$$

$g_1 = 1 \rightarrow$ ошибка телепортации совпадает с предыдущим случаем, но с единичным весовым коэффициентом, т.е. данный протокол лучше схемы с двумя BS, но хуже схемы с двумя CZ.

ТЕЛЕПОРТАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ РЕАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ CZ

J. Yoshikawa, Y. Miwa, A. Huck, U. Andersen, P. van Loock, A. Furusawa, Phys. Rev. Lett. 101, 250501 (2008).

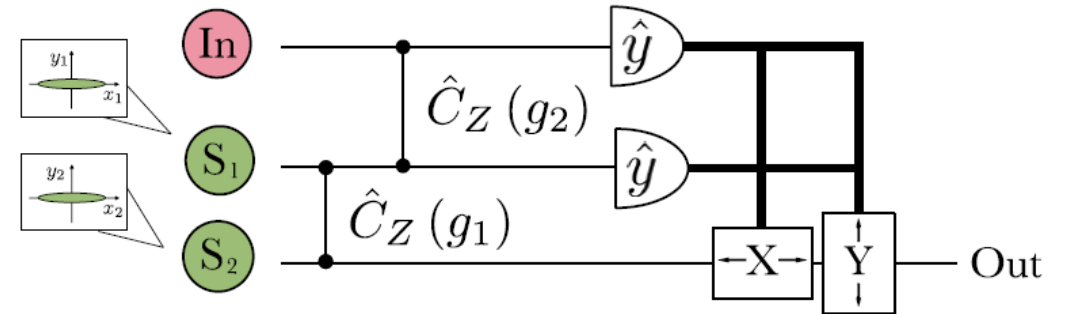
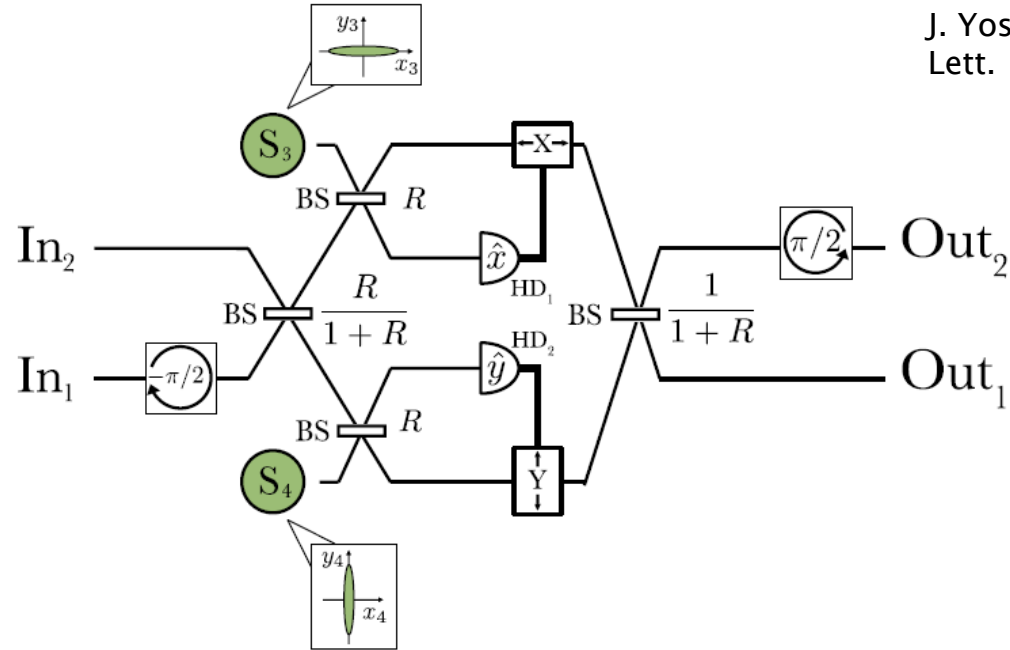


Схема оптической реализации преобразования CZ:

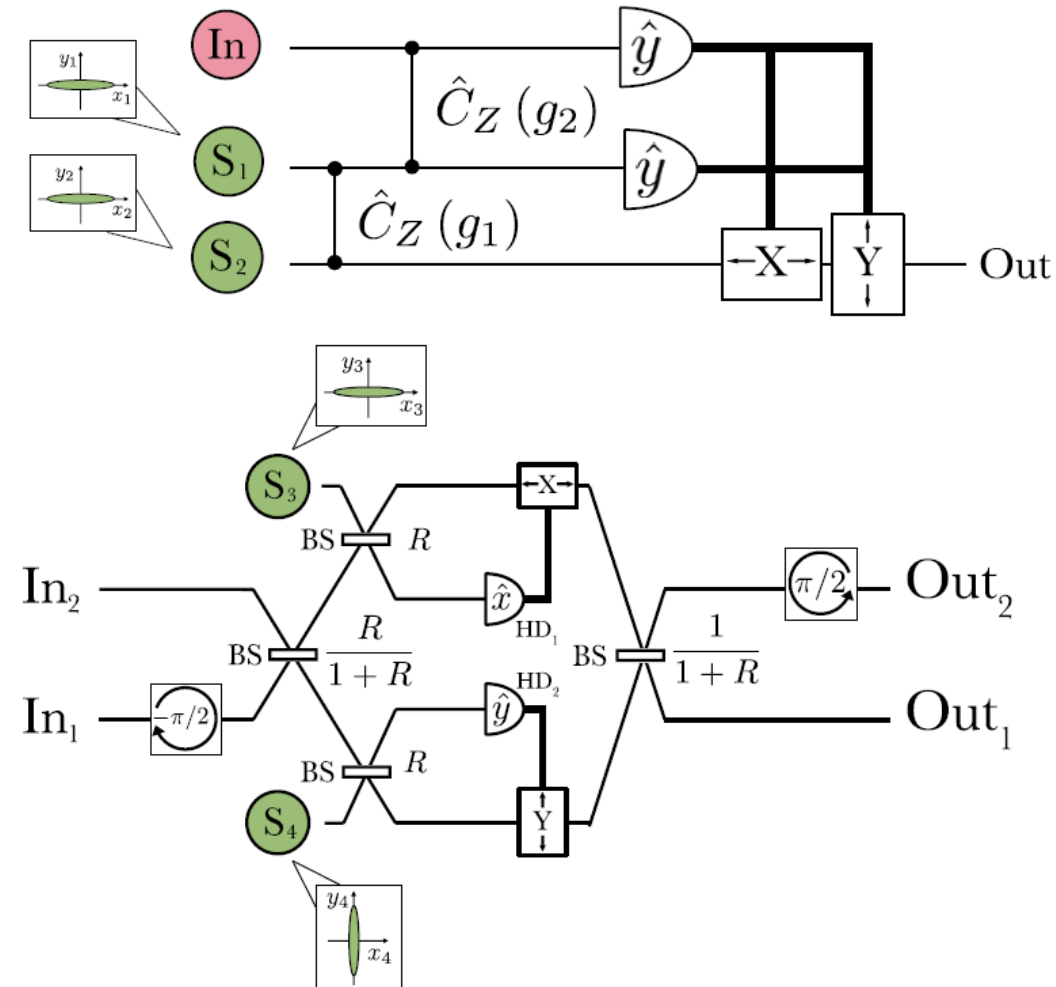
$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{out,1} \\ \hat{x}_{out,2} \\ \hat{y}_{out,1} \\ \hat{y}_{out,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-R}{\sqrt{R}} & 1 & 0 \\ \frac{1-R}{\sqrt{R}} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in,1} \\ \hat{x}_{in,2} \\ \hat{y}_{in,1} \\ \hat{y}_{in,2} \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{1-R}{1+R}} \begin{pmatrix} -\hat{x}_{s,4} \\ \hat{y}_{s,3} \\ -\sqrt{R}\hat{y}_{s,3} \\ -\sqrt{R}\hat{x}_{s,4} \end{pmatrix}$$

ТЕЛЕПОРТАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ РЕАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ CZ

$$\hat{x}_{out} = -\hat{x}_{in} - \frac{\sqrt{R}}{1-R}\hat{y}_{s,1} + \frac{R}{\sqrt{1-R^2}}\hat{x}_{s,4} + \frac{1}{\sqrt{1-R^2}}\hat{y}_{s,5},$$

$$\hat{y}_{out} = -\hat{y}_{in} + \hat{y}_{s,2} + \sqrt{R}\frac{\sqrt{1-R}}{\sqrt{1+R}}(\hat{x}_{s,6} - \hat{y}_{s,3})$$

- первые слагаемые – основной эффект (телепортация);
- вторые слагаемые – ошибка от ресурсных состояний;
- третьи слагаемые – ошибка от гейтов CZ



ТЕЛЕПОРТАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ РЕАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ CZ

$$\hat{x}_{out} = -\hat{x}_{in} - \frac{\sqrt{R}}{1-R}\hat{y}_{s,1} + \frac{R}{\sqrt{1-R^2}}\hat{x}_{s,4} + \frac{1}{\sqrt{1-R^2}}\hat{y}_{s,5},$$

$$\hat{y}_{out} = -\hat{y}_{in} + \hat{y}_{s,2} + \sqrt{R}\frac{\sqrt{1-R}}{\sqrt{1+R}}(\hat{x}_{s,6} - \hat{y}_{s,3})$$

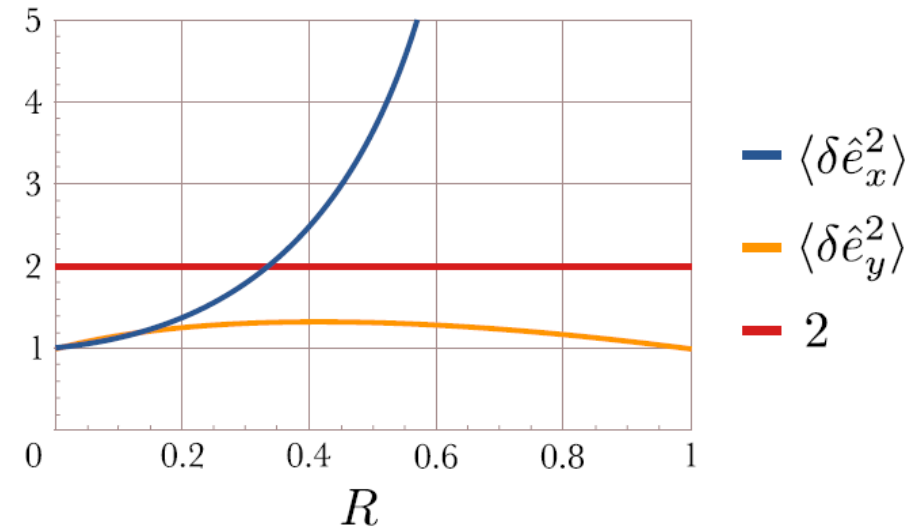
- первые слагаемые – основной эффект (телепортация);
- вторые слагаемые – ошибка от ресурсных состояний;
- третьи слагаемые – ошибка от гейтов CZ

$$\langle \delta \hat{e}_x^2 \rangle = \left(\frac{1 + (2-R)R^2}{(1-R)^2(1+R)} \right) \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle,$$

$$\langle \delta \hat{e}_y^2 \rangle = \left(\frac{1 + 3R - 2R^2}{1+R} \right) \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$$

→ обе квадратуры зависят от управляющего параметра (в идеальном CZ – только одна);

→ зависимость ошибки X-квадратуры от управляющего параметра – обратная, чем он больше, тем больше ошибка.



Среднеквадратичная ошибка телепортации при оптической реализации CZ в зависимости от коэффициента отражения светоделителей.

ТЕЛЕПОРТАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ РЕАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ CZ

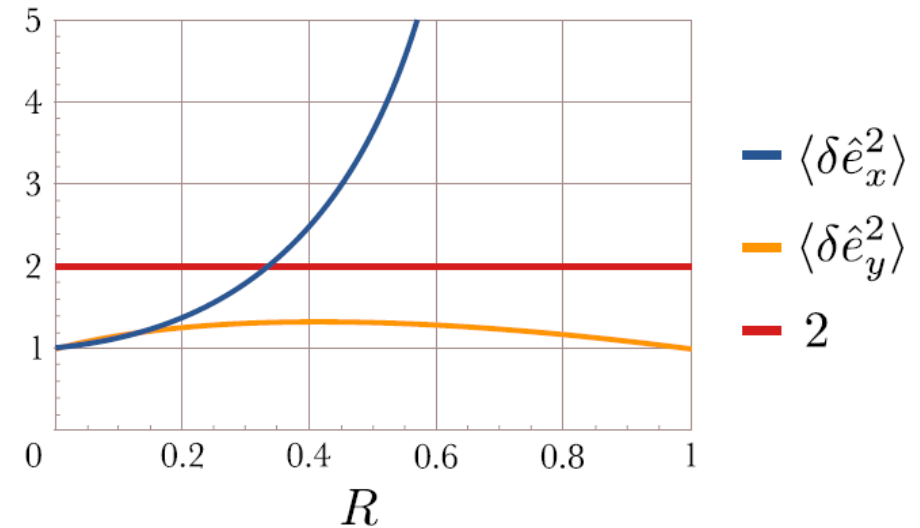
$$\hat{x}_{out} = -\hat{x}_{in} - \frac{\sqrt{R}}{1-R}\hat{y}_{s,1} + \frac{R}{\sqrt{1-R^2}}\hat{x}_{s,4} + \frac{1}{\sqrt{1-R^2}}\hat{y}_{s,5},$$

$$\hat{y}_{out} = -\hat{y}_{in} + \hat{y}_{s,2} + \sqrt{R}\frac{\sqrt{1-R}}{\sqrt{1+R}}(\hat{x}_{s,6} - \hat{y}_{s,3})$$

- первые слагаемые – основной эффект (телепортация);
- вторые слагаемые – ошибка от ресурсных состояний;
- третьи слагаемые – ошибка от гейтов CZ

$$\langle \delta \hat{e}_x^2 \rangle = \left(\frac{1 + (2-R)R^2}{(1-R)^2(1+R)} \right) \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle,$$

$$\langle \delta \hat{e}_y^2 \rangle = \left(\frac{1 + 3R - 2R^2}{1+R} \right) \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$$



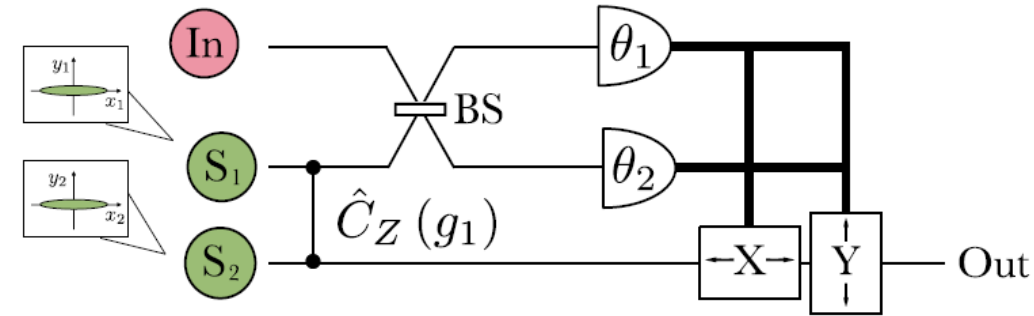
Среднеквадратичная ошибка телепортации при оптической реализации CZ в зависимости от коэффициента отражения светоделителей.

При $R < 0.33$ рассматриваемая оптическая схема имеет преимущество перед традиционным протоколом телепортации.

ПРИМЕНЕНИЕ ОПТИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ CZ В СМЕШАННОЙ СХЕМЕ ТЕЛЕПОРТАЦИИ

$$\hat{x}_{out} = \frac{\sqrt{R}}{1-R}\hat{x}_{in} - \frac{\sqrt{R}}{1-R}\hat{y}_{s,1} + \frac{1}{\sqrt{1-R^2}}\hat{y}_{s,3},$$

$$\hat{y}_{out} = \frac{1-R}{\sqrt{R}}\hat{y}_{in} + \hat{y}_{s,2} + (1-2R)\sqrt{\frac{1-R}{R(1+R)}}\hat{x}_{s,4}.$$



телепортация $\rightarrow R = \frac{1}{2} (3 - \sqrt{5}) \approx 0.38$

$$\langle \delta \hat{e}_x^2 \rangle = \frac{3\sqrt{5}}{10} (1 + \sqrt{5}) \langle \delta \hat{y}_s \rangle \approx 2.17 \langle \delta \hat{y}_s \rangle,$$

$$\langle \delta \hat{e}_y^2 \rangle = \frac{\sqrt{5}}{10} (7 - \sqrt{5}) \langle \delta \hat{y}_s \rangle \approx 1.07 \langle \delta \hat{y}_s \rangle$$

- нет варьируемого параметра, фиксированное значение ошибки – аналогично идеальной схеме;
- ошибка в X-квадратуре больше, чем в традиционной схеме телепортации, а в Y-квадратуре – меньше, нет однозначного преимущества.

- Уменьшили ошибку телепортации, заменив светоделители гейтами CZ.
- Продемонстрировали данный результат не только для идеальной схемы CZ, но и для реальной его реализации – оптической.
- Результаты идеальной и реальной схем совпадают только при единичных весовых коэффициентах.
- Весовые коэффициенты – дополнительный фактор управления шумами.
- Оптимальное значение весовых коэффициентов: баланс между подавлением шума ресурсного состояния и добавлением собственного шума преобразования CZ.
- Примеры других реализаций CZ:
 - CZ с помощью лучей света, распространяющихся внутри спиново-сжатого атомного ансамбля; весовые коэффициенты можно изменять, меняя длительность импульсов.
Ming-Feng Wang, Nian-Quan Jiang, Qing-Li Jin, and Yi-Zhuang Zheng, Phys. Rev. A 83, 062339 (2011)
 - на вибрационных модах ионных кубитов
Leibfried, D. et al. Nature 422, 412–415 (2003)
 - в сверхпроводящих цепях с резонаторами (измерение геометрической фазы)
Chao Song, Shi-Biao Zheng, Pengfei Zhang et. al., Nature Comm. 8, 1061 (2017).
- CZ сложно делать экспериментально.
- Что проще – негауссовы операции или гауссова перепутывающая операция с большим весовым коэффициентом?