

Квантовые гейты для кудитов с орбитальным угловым моментом

Вашукевич Е.А., Голубева Т.Ю., Голубев Ю.М.



Научный семинар Лаборатории квантовой оптики
19.03.21



План доклада

- Кудиты и операции с одним кудитом
- Орбитальный угловой момент света как ресурс для построения кудита
- Преобразование ОУМ на ячейке квантовой памяти
- Оценка эффективности X гейта
- Какую же размерность пространства выбрать?

Кудиты – d - мерные квантовые объекты

Кубит – два **физически различимых** состояния:

$$|\psi\rangle_{qubit} = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle$$

Кудит – d физически различимых состояний:

$$|\psi\rangle_{qudit} = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle + c_3|3\rangle + \dots + c_d|d\rangle$$

Примеры физических реализаций:

- Поляризационные состояния света
- Двухуровневые атомы
- Сверхпроводящие контуры
- Орбитальный угловой момент света
- Дискретизированный оптический комб
- Молекулярный спин
-

Зачем?

- Увеличивается информационная ёмкость канала – количество **бит**, передаваемое одним физическим носителем
- Увеличивается защищенность криптографических протоколов – больше размерность приборного базиса – меньше вероятность успешного перехвата

Идеальные преобразования над одним кудитом

Кудит – объект гильбертова пространства $\mathcal{H}^d$, операторы, действующие на $\mathcal{H}^d$ – объекты из $\mathcal{L}(\mathcal{H}^d)$. Размерность пространства Гильберта-Шмидта $d^2 - 1$. Базис - генераторы группы $SU(d)$:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3 матрицы Паули при $d = 2$

8 матриц Гелл-Манна при $d = 3$

.....

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Операции X и Z похожи на кубитовые, однако кроме них мы рассмотрим также целочисленные степени операторов:

$$\hat{X}_d = \sum_{l=1}^d |l \oplus_d 1\rangle \langle l|$$

$$\hat{X}_d^m = \sum_{l=1}^d |l \oplus_d m\rangle \langle l|$$

- Коммутационные соотношения:

$$[\hat{X}_d^k, \hat{X}_d^m] = [\hat{Z}_d^k, \hat{Z}_d^m] = 0,$$

$$[\hat{X}_d^k, \hat{Z}_d^m] = \sum_{j=1}^d \left(\omega^{mj} - \omega^{m(j \oplus_d m)} \right) |j \oplus_d m\rangle \langle j|$$

- Циклическая замкнутость:

$$\hat{X}_d^d = \hat{Z}_d^d = I$$

$$\hat{Z}_d = \sum_{l=1}^d |l\rangle \omega^l \langle l|$$

$$\hat{Z}_d^m = \sum_{l=1}^d |l\rangle \omega^{ml} \langle l|$$

$$\omega = \exp 2\pi i / d$$

$$l \oplus_d 1 = l + 1 \mod(d)$$

Унитарный набор однокудитовых операций

Для описания произвольного унитарного преобразования $\hat{U}$ достаточно только X , Z и их степеней. Рассмотрим альтернативный операторный базис $\mathcal{L}(\mathcal{H}^d)$:

$$\hat{\mathcal{D}}(j, k) = \exp \left\{ i \frac{\pi k j}{2} \right\} \hat{Z}_d^j \hat{X}_d^k \quad - \text{операторы Гейзенберга-Вейля}$$

$$\hat{\mathcal{Q}}_{j,k} = \frac{1+i}{2} \hat{\mathcal{D}}(j, k) + \frac{1-i}{2} \hat{\mathcal{D}}^\dagger(j, k) \quad - \text{полный ортонормированный набор}$$

$$\hat{A} = \sum_{k=0}^{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} C_{j,k} \hat{\mathcal{Q}}_{j,k} \quad - \text{разложение произвольного эрмитовского оператора}$$

Произвольное унитарное преобразование может быть записано через эрмитовское:

$$\hat{U} = \exp \{ i A \} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \hat{A}^n \quad \Rightarrow \quad \hat{U} = \sum_{k=0}^{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} g_{j,k} \hat{X}_d^j \hat{Z}_d^k$$

Кудиты с орбитальным угловым моментом

ОУМ света может принимать любые целочисленные значения, однофотонное состояние можно разложить по состояниям с определённым ОУМ:

$$|\Psi\rangle = \sum_{l=1}^N B_l |l\rangle, \quad |l\rangle = \hat{a}_l^\dagger |0\rangle$$

Операция X в терминах преобразования состояния с ОУМ – прибавление 1 к каждому члену суперпозиции, Z – добавление фазы. Операция X циклически незамкнута:

$$X_d |d\rangle_{physical} = |d+1\rangle_{physical}$$

Поделим на логические наборы

$$l = \underbrace{1, 2, \dots, d}_{\text{first logical set}}, \quad \underbrace{d+1, \dots, 2d}_{\text{second logical set}}, \dots, \quad \underbrace{\dots, N}_{N/d \text{ logical set}}$$

$$X_d |d\rangle_{physical} = |d+1\rangle_{physical} \equiv |1\rangle_{logical}$$

Состояние кудита:

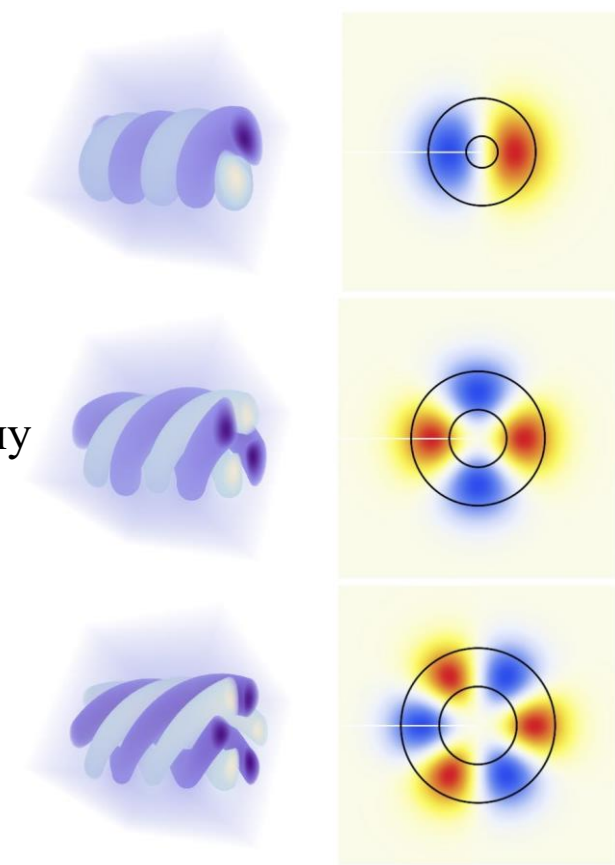
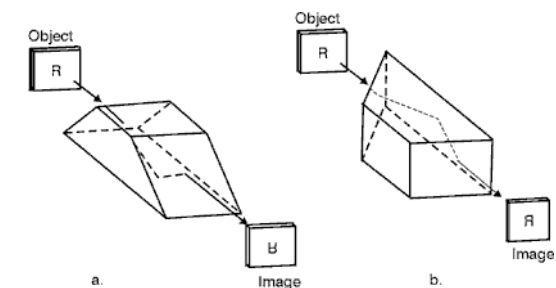
$$|\psi\rangle = \sum_{l=1}^d C_l \hat{a}_l^\dagger |0\rangle = \hat{A}^\dagger |0\rangle$$

$$\hat{\rho}_{in} = |\psi\rangle\langle\psi| = \hat{A}^\dagger |0\rangle\langle 0| \hat{A}$$

Идеальное преобразование X:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{ideal} &= \hat{X}_d^m |\psi\rangle\langle\psi| \hat{X}_d^{-m} \\ &= \sum_{l=1}^d C_l \hat{a}_{l \oplus_d m}^\dagger |0\rangle\langle 0| \sum_{l=1}^d C_l \hat{a}_{l \oplus_d m} \end{aligned}$$

Идеальное преобразование Z при помощи призмы Дове

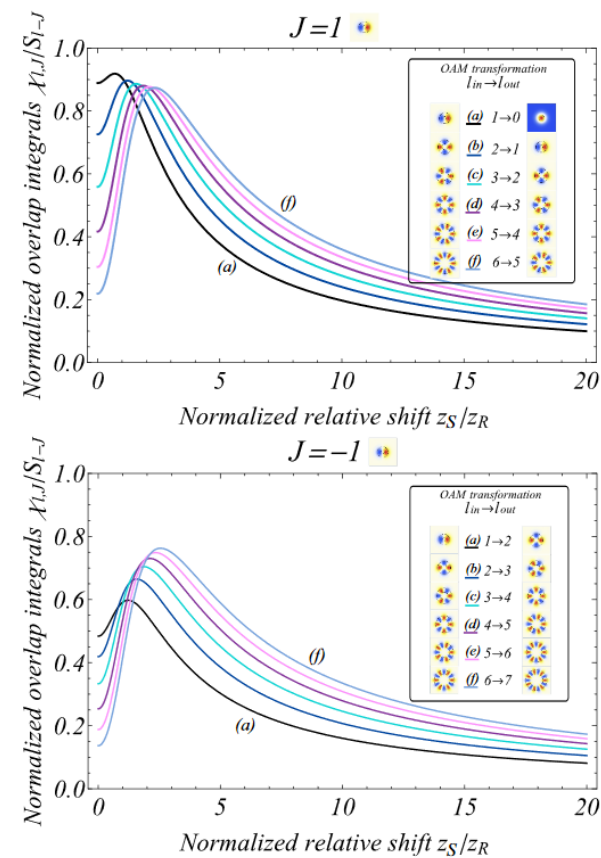
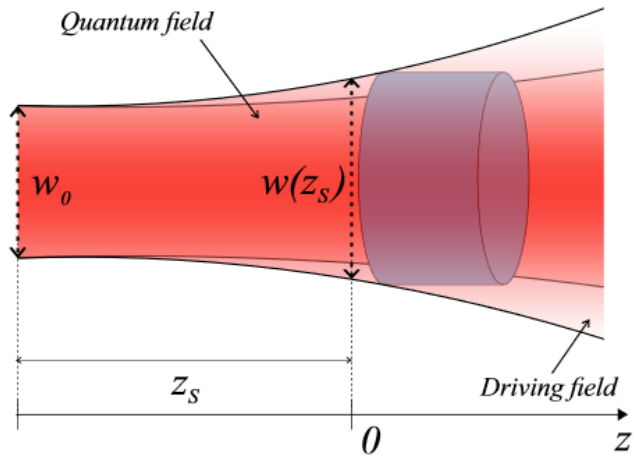


Неидеальное преобразование χ_d на ячейке квантовой памяти

Существует способ преобразовывать ОУМ (на величину J) квантового поля прямо на ячейке квантовой памяти, при условии что управляющее поле также обладает моментом J :

$$\hat{a}_{l-J}^{out}(\tilde{t}) = \chi_{l,J} \int_0^{\tilde{T}} d\tilde{t}' \hat{a}_l^{in}(\tilde{t}') K(\tilde{t}, \tilde{t}').$$

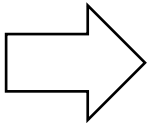
$\chi_{l,J}$ - коэффициенты, определяющие эффективность, зависят от геометрического перекрытия мод. z_s - уприваляющий параметр (расстояние между перетяжками управляющего и сигнального пучков)



Таким способов можно осуществлять преобразование X состояния кудита. Поскольку коэффициенты всегда меньше единицы, то оно проходит с потерями и мы обозначим его как $\hat{x}_d^m$. Если состояние на входе – чистое, то состояние на выходе – смешанное:

$$|\psi\rangle = \sum_{l=1}^d C_l \hat{a}_l^\dagger |0\rangle = \hat{A}^\dagger |0\rangle$$

$$\hat{\rho}_{in} = |\psi\rangle\langle\psi| = \hat{A}^\dagger |0\rangle\langle 0| \hat{A}$$



$$\hat{\rho}_{out} = p_1 \hat{\rho}_1 + \sum_{k=2}^{2^d} p_k \hat{\rho}_k,$$

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\hat{x}_d^m \hat{\rho}_{in} \hat{x}_d^{-m}}{\text{Tr} [\hat{x}_d^m \hat{\rho}_{in} \hat{x}_d^{-m}]}.$$

$$p_1 = \prod_{l=1}^d \chi_{m,l}^2 \text{ - вероятность преобразования}$$



Измерение ОУМ одного фотона

Measuring the Orbital Angular Momentum of a Single Photon

Jonathan Leach,¹ Miles J. Padgett,¹ Stephen M. Barnett,² Sonja Franke-Arnold,² and Johannes Courtial^{1,*}

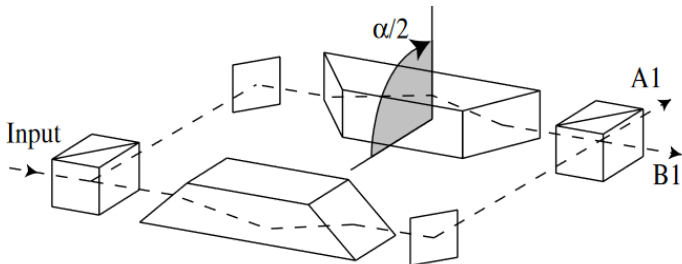
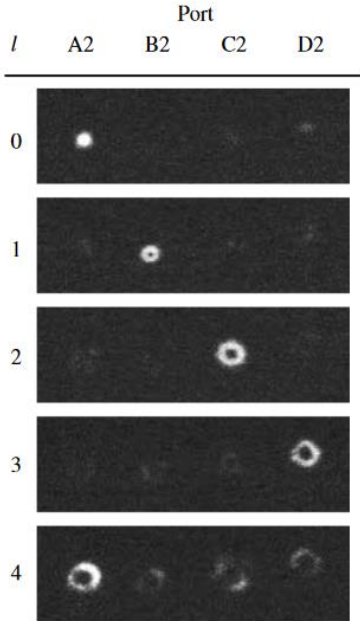
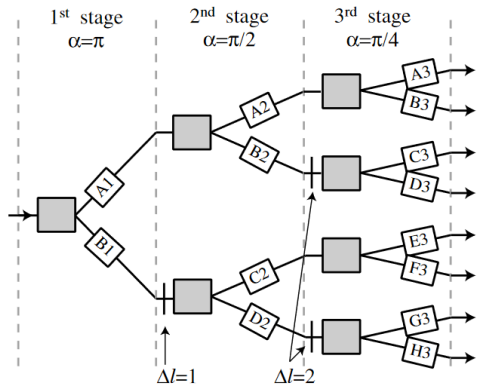
¹Department of Physics and Astronomy, University of Glasgow, Glasgow, Scotland

²Department of Physics and Applied Physics, University of Strathclyde, Glasgow, Scotland
(Received 21 January 2002; published 5 June 2002)

We propose an interferometric method for measuring the orbital angular momentum of single photons. We demonstrate its viability by sorting four different orbital angular momentum states, and are thus able to encode two bits of information on a single photon. This new approach has implications for entanglement experiments, quantum cryptography and high density information transfer.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.257901

PACS numbers: 03.67.-a, 42.50.Ci



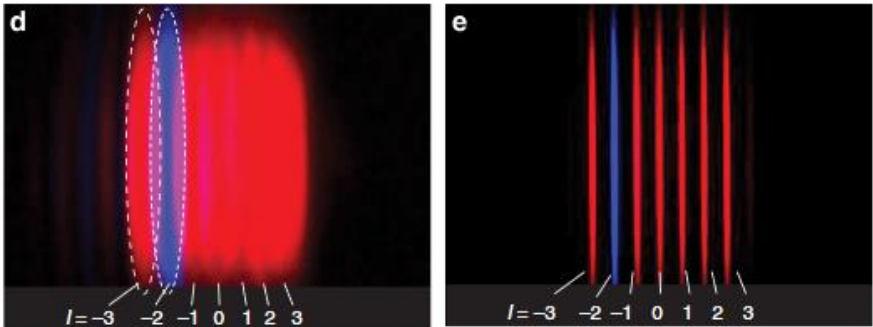
ARTICLE

Received 12 Jul 2013 | Accepted 16 Oct 2013 | Published 12 Nov 2013

DOI: 10.1038/ncomms3781

Efficient separation of the orbital angular momentum eigenstates of light

Mohammad Mirhosseini¹, Mehul Malik^{1,2}, Zhimin Shi^{1,3} & Robert W. Boyd^{1,4}

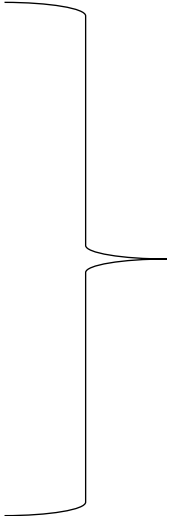


Критерии оценки качества преобразования

- Оценка вероятности: $p_1 = \prod_{l=1}^d \chi_{m,l}^2$
- Оценка «когерентности» преобразования для входного состояния

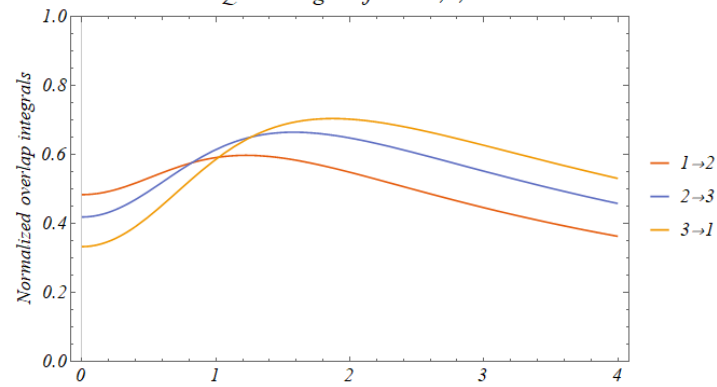
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} (|1\rangle + |2\rangle + \dots + |d\rangle) : \quad F = \left(\text{Tr} \sqrt{\sqrt{\hat{\rho}_{ideal}} \hat{\rho}_1 \sqrt{\hat{\rho}_{ideal}}} \right)^2$$

- Выигрыш от увеличения информационной ёмкости: $\log_2 d$

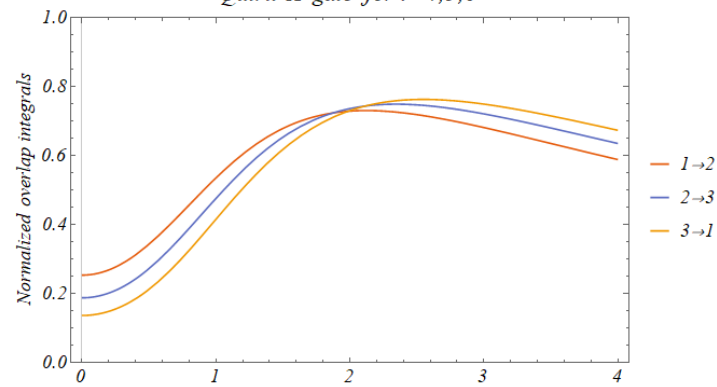

$$\eta = p_1 F \log_2 d$$

Частный случай. Кутриты. Эффективность преобразования X

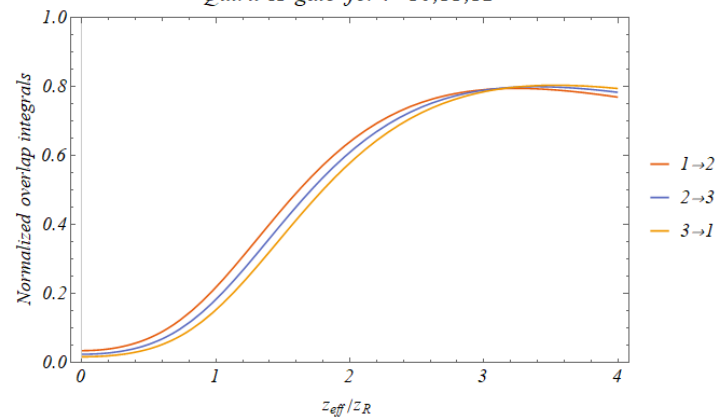
Qutrit X gate for $l=1,2,3$



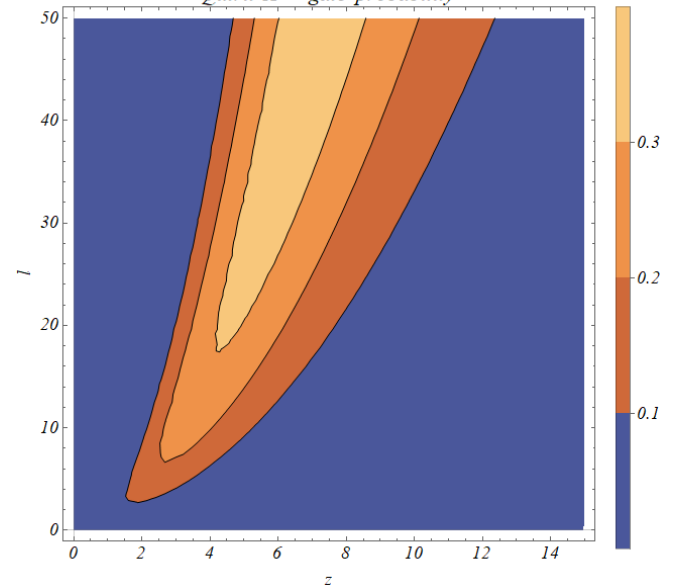
Qutrit X gate for $l=4,5,6$



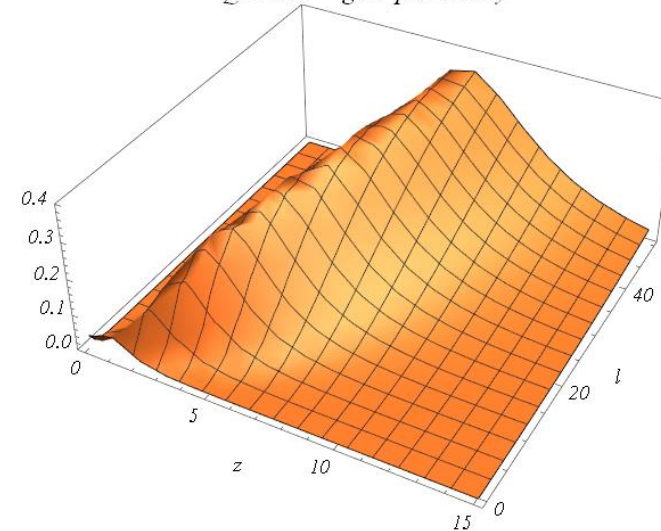
Qutrit X gate for $l=10,11,12$



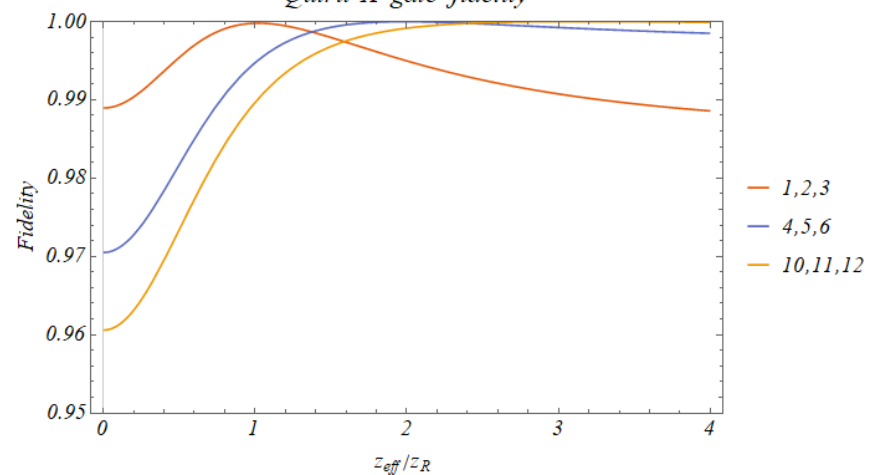
Qutrit X gate probability



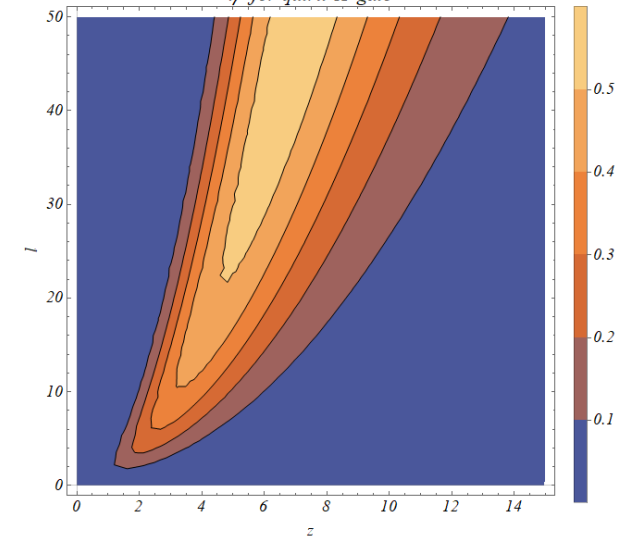
Qutrit X gate probability



Qutrit X gate fidelity

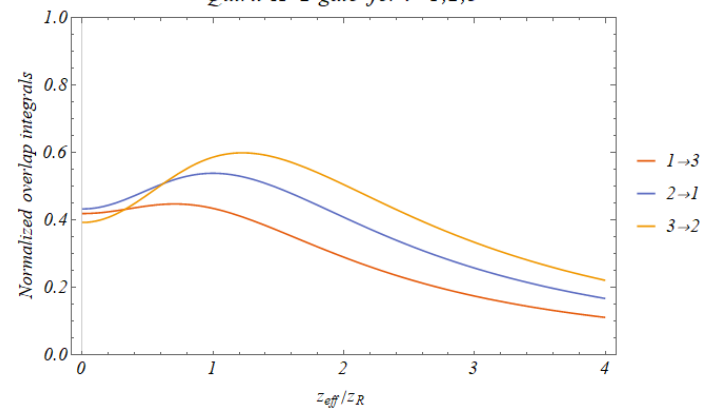


η for qutrit X gate

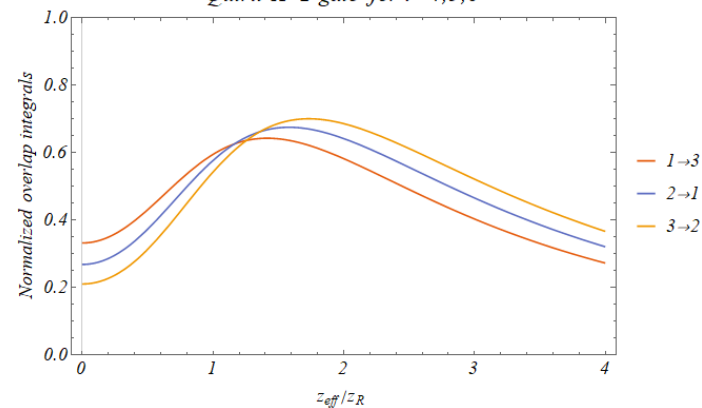


Частный случай. Кутриты. Эффективность преобразования X^2

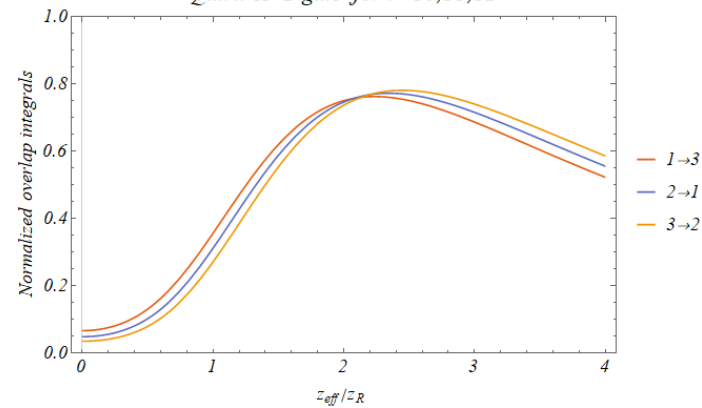
Qutrit X^2 gate for $l=1,2,3$



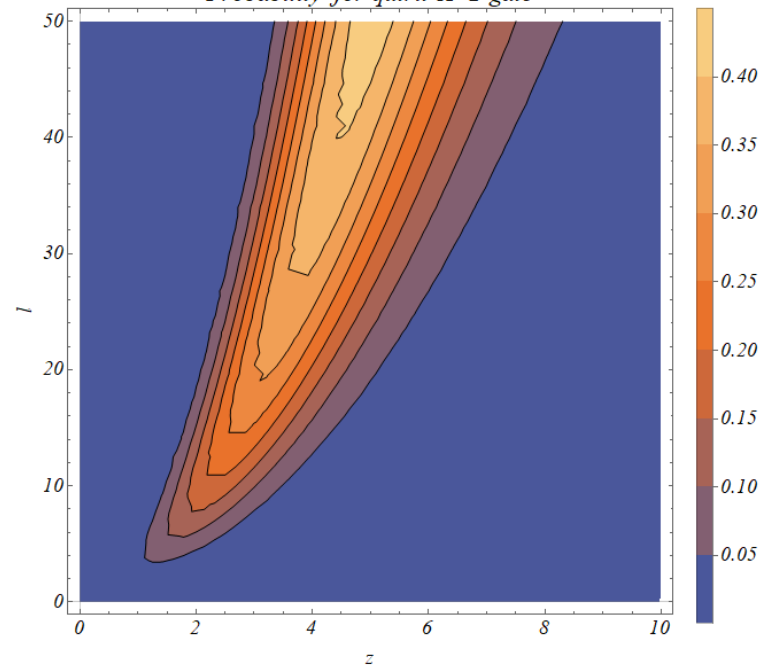
Qutrit X^2 gate for $l=4,5,6$



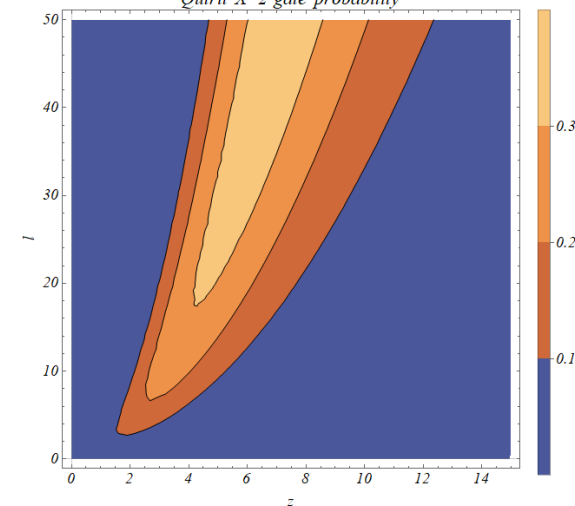
Qutrit X^2 gate for $l=10,11,12$



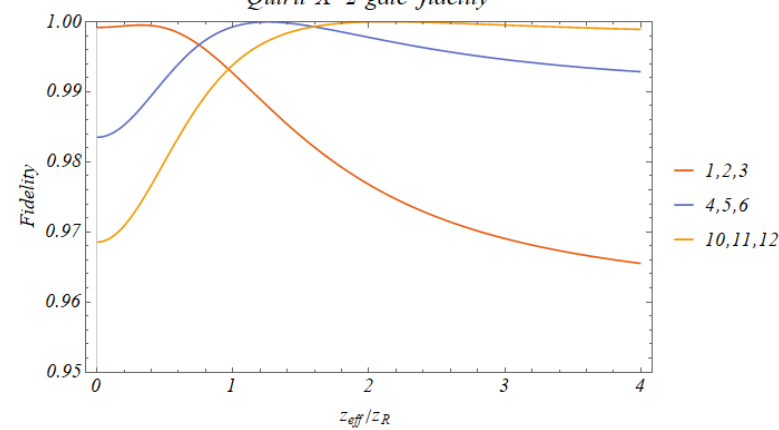
Probability for qutrit X^2 gate



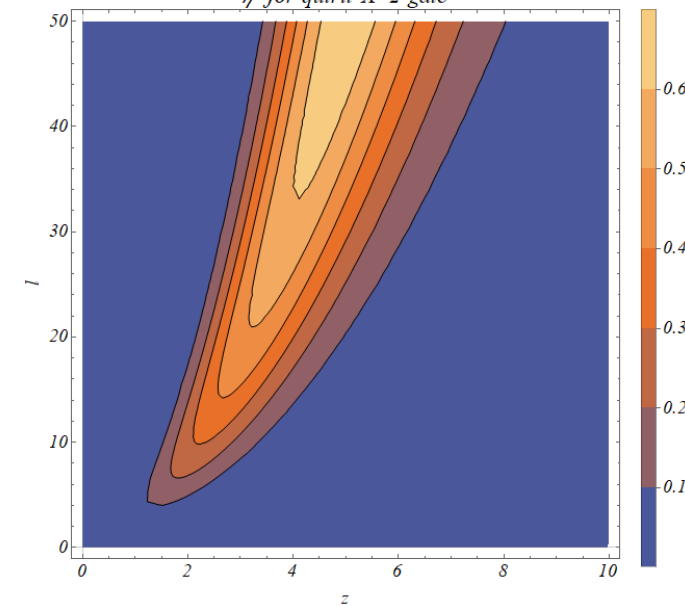
Qutrit X^2 gate probability



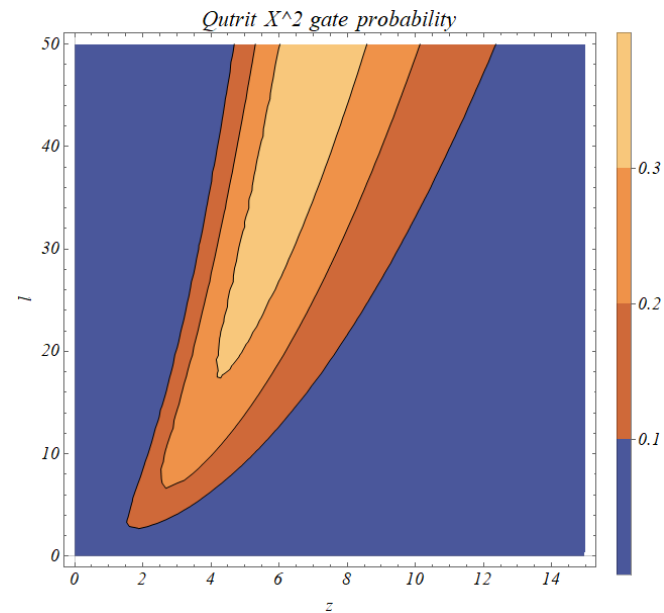
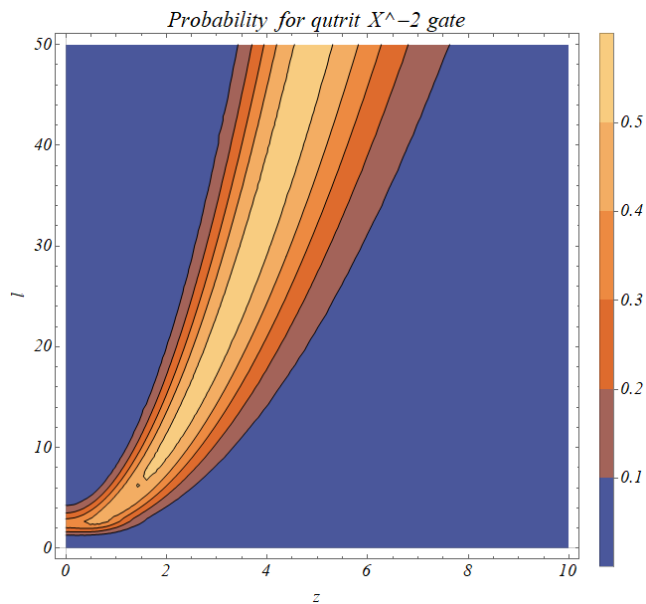
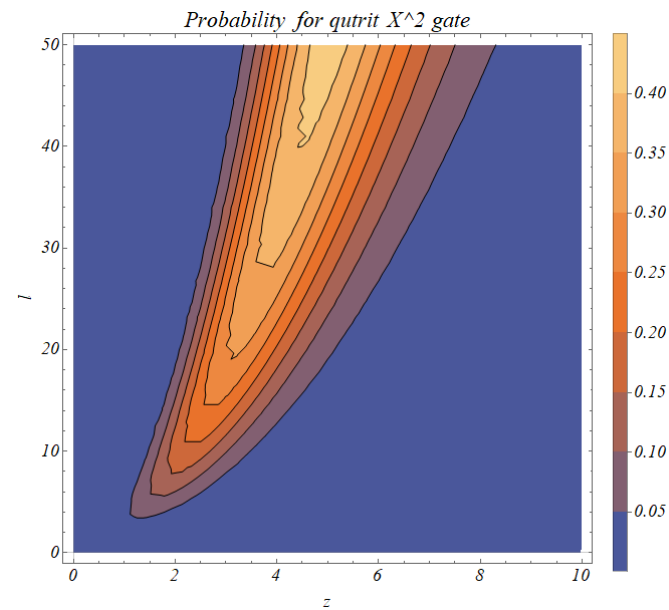
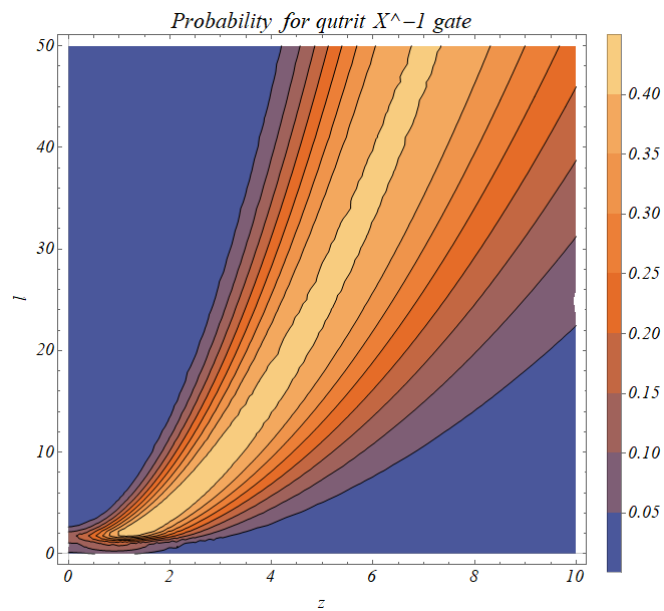
Qutrit X^2 gate fidelity



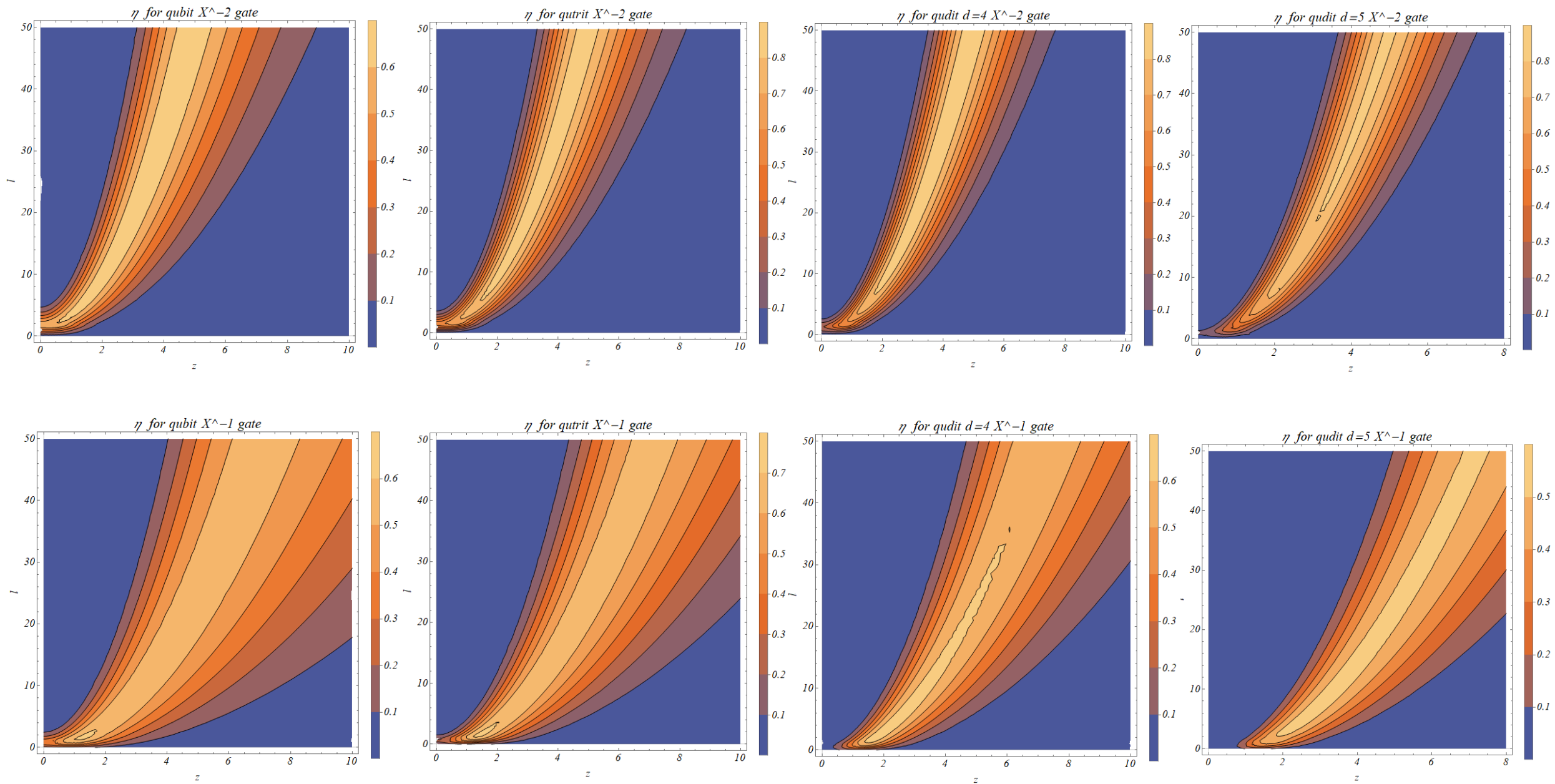
η for qutrit X^2 gate



Частный случай. Кутриты. Эффективность преобразования X^{-1} , X^{-2}



Сравнение гейтов для систем разной размерности



Расчеты для кудитов разных размерностей

Расчёты для малых l :

$$X_d^1$$

d	Max F	Max P	Max η
2	1	0.3	0.3
3	0.999991	0.17	0.27
4	0.999941	0.099	0.198
5	0.999875	0.058	0.135

$$X_d^2$$

d	Max F	Max	Max η
2	1	0.19	0.19
3	0.999974	0.09	0.14
4	0.999824	0.04	0.09
5	0.999624	0.022	0.052

$$X_d^{-2}$$

d	Max F	Max P	Max η
2	1	0.6	0.6
3	0.999967	0.49	0.78
4	0.999782	0.369	0.74
5	0.999542	0.269	0.62

Fidelity for arb. l for ququarts

From $1 - 10^{-4}$
To $1 - 10^{-9}$

Probability for arb. l for ququarts

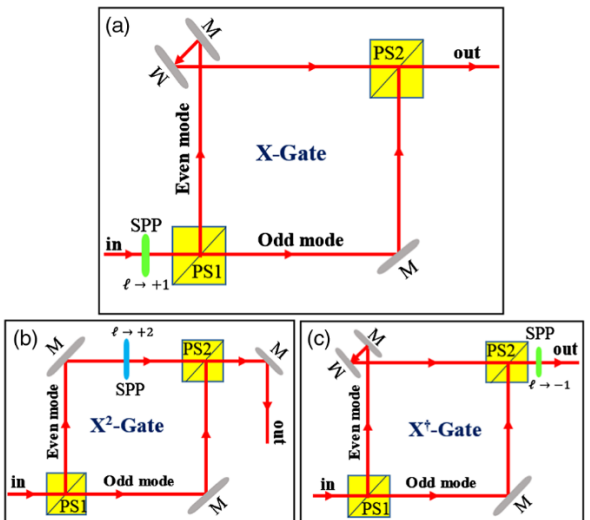
From 25%, 34%, 23%
To 40%, 60%, 43%

High-Dimensional Single-Photon Quantum Gates: Concepts and Experiments

Amin Babazadeh,^{1,2,3} Manuel Erhard,^{1,2,†} Feiran Wang,^{1,2,4} Mehul Malik,^{1,2} Rahman Nouroozi,³ Mario Krenn,^{1,2,*} and Anton Zeilinger^{1,2}
¹Vienna Center for Quantum Science and Technology (VCQ), Faculty of Physics, University of Vienna, Boltzmannngasse 5, 1090 Vienna, Austria
²Institute for Quantum Optics and Quantum Information (IQOQI), Austrian Academy of Sciences, Boltzmannngasse 3, 1090 Vienna, Austria
³Physics Department, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Gavazang Road, Zanjan 45137-66731, Iran
⁴Key Laboratory of Quantum Information and Quantum Optoelectronic Devices, Shaanxi Province, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China

$$F_X = 93.4 \pm 0.9,$$
$$F_{X^2} = 94.1 \pm 0.7,$$
$$F_{X^\dagger} = 91.6 \pm 0.7,$$

87.3%, 90.4%, and 88.4%,



Предварительные выводы

1. Преобразование кудитов на основе ОУМ можно проводить с высокой верностью
2. Низкие вероятности можно устранить методом постселекции
3. Пока не представляется возможным дать ответ на вопрос «с системами какой размерности лучше работать?»

Спасибо за внимание!

